

INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

MÁSTER UNIVERSITARIO EN INGENIERÍA DE SISTEMAS Y DE CONTROL

Curso 2023/2024

(Código: 31104021)

Conceptos generales sobre optimización matemática

- ❑ La optimización matemática es una potente técnica de Investigación Operativa utilizada en la toma de decisiones.
- ❑ La Investigación Operativa comenzó su desarrollo durante la Segunda Guerra Mundial cuando un grupo de científicos ayudó al ejército a resolver complejos problemas logísticos y estratégicos relativos al despliegue de recursos y planificación de operaciones.
- ❑ El nombre Investigación Operativa proviene de su aplicación a operaciones militares. Después de la Guerra se comenzó a aplicar a problemas similares de la industria.
- ❑ La investigación operativa utiliza diferentes herramientas tales como:
 - Optimización matemática.
 - Estadística.
 - Teoría de la probabilidad.
 - Simulación.
 - Análisis de decisiones.
- ❑ Estas herramientas se suelen utilizar de forma combinada, pero en este curso nos centraremos en la optimización matemática y en la Programación Lineal (LP) como la técnica de optimización matemática mejor conocida y de la que se han derivado muchas otras técnicas.

Relación entre la investigación operativa y las tecnologías de la información (OR y IT)

Existe una estrecha relación entre OR e IT:

Una aplicación de OR requiere normalmente:

- Grandes cantidades de datos históricos y de tiempo real.
- Una integración coordinada con sistemas de gestión.
- Grandes capacidades de procesamiento matemático.

Los computadores y las tecnologías de la información en general ayudan a satisfacer estas necesidades con:

- Sistemas para el diseño e implantación y gestión de grandes bases de datos.
- Diseño de redes de computadores.
- Administración de sistemas.

Los ingenieros informáticos y los expertos en investigación operativa colaboran en el diseño y desarrollo de sistemas basados en la optimización.

Proceso de optimización matemática

❑ En nuestro curso el término optimización hará referencia a la **optimización matemática**, que implica utilizar un conjunto de técnicas matemáticas para encontrar la mejor solución posible a un problema de gestión comercial o industrial. Una solución basada en optimización implica:

- Un modelo de optimización, definido en términos de variables de decisión, restricciones y una función objetivo.
- Datos para crear una instancia del modelo.
- Un motor de optimización (algoritmo) que resuelva la instancia del modelo

❑ El proceso de optimización busca valores para las variables de decisión que satisfagan todas las restricciones y optimicen la función objetivo.

❑ La optimización es una herramienta de ayuda a la toma de decisiones que tiene aplicaciones en casi todas las industrias. Se pueden optimizar un amplio rango de decisiones, por ejemplo:

- La cantidad de productos a fabricar, cuando fabricarlos y dónde fabricarlos.
- Cómo transportar artículos elaborados, personas o materias primas.
- Cómo mezclar materias primas.
- Cómo planificar mano de obra, tareas o máquinas.
- Cómo ubicar y asignar instalaciones y equipos.
- Cómo invertir capital.

Técnicas de optimización matemática

Las dos técnicas más importantes de optimización matemática son:

- La Programación Matemática (MP).
- La Programación con Restricciones (CP).

❑ Las técnicas de **programación matemática** incluyen:

- Programación Lineal.
- Programación entera.
- Programación entera-mixta.
- Programación no lineal: programación cuadrática (QP), Programación Cuadrática entera-mixta (MIQP).

❑ La **programación con restricciones** se adecúa especialmente a:

- Problemas de planificación temporal de corto plazo.
- Algunos problemas de optimización combinatoria que no se pueden resolver utilizando los métodos de programación matemática.

Variables de decisión

Las variables de decisión en un modelo de optimización representan valores o decisiones que pueden fijarse por el motor de optimización para conseguir el mejor valor posible de la función objetivo.

❑ **Ejemplos de variables de decisión** serían los siguientes:

- Cantidad a fabricar de un producto dado.
- Número de personas a contratar para realizar una tarea dada.
- Elegir la localización de un nuevo almacén.
- El tiempo de inicio de una tarea dada.

❑ Algunas **características de las variables de decisión** son las siguientes:

- Su valor se calcula durante el proceso de solución.
- Inicialmente son desconocidas en el modelo, aunque es posible proporcionar una pista inicial para ayudar a la optimización.
- Las variables de decisión tienen un dominio: el conjunto de todos los valores posibles de la variable.
- Las variables de decisión tienen límites impuestos por los límites de su dominio.
- Las variables de decisión tienen tipo, por ejemplo, real, entero, booleano o intervalo (utilizado sólo en CP).

❑ La **elección de las variables de decisión** es importante porque tienen un impacto significativo en la formulación de las restricciones y el método de optimización utilizado.

Restricciones

Las restricciones definen las relaciones entre diferentes variables de decisión y relacionan también los datos con dichas variables.

Representan los límites dentro de los cuales debe existir la solución. Los siguientes son ejemplos de restricciones:

- La cantidad fabricada de un producto dado debe ser menor que la capacidad de producción.
- Las personas contratadas para realizar una tarea dada deben tener un conjunto mínimo de habilidades profesionales.
- El coste total para construir un nuevo almacén debe ser menor que la cantidad de dinero presupuestada.
- La salida de un proceso debe ser igual al rendimiento multiplicado por la entrada.
- Una cierta tarea sólo puede comenzar una vez que se haya completado otra tarea relacionada.

Función objetivo

La función objetivo de un modelo de optimización es una representación matemática de los logros industriales que se desean conseguir.

Las funciones objetivos son de maximización o minimización y suelen involucrar un objetivo simple o una expresión compleja que involucra varios objetivos industriales.

Algunos ejemplos de objetivos son los siguientes:

- Maximizar un beneficio.
- Minimizar un coste.
- Minimizar retrasos.
- Maximizar el servicio a los clientes

Clasificación de los problemas de optimización atendiendo a su solución

❑ En optimización una solución es una propuesta de valores específicos para las variables de decisión. Una solución puede ser:

- **Factible:** una solución que satisface todas las restricciones.
- **Optima:** una solución factible que alcanza el mejor valor posible de la función objetivo.
- **No factible:** Una solución que viola una o más restricciones.
- **No acotada:** Una solución que produce un valor de la función objetivo que tiende a más o menos infinito dependiendo de si se trata de un problema de maximización o minimización.

❑ El conjunto de todas las soluciones factibles se denomina **región factible**.

Resumen de la asignatura

La programación matemática es una técnica de optimización utilizada en el proceso de toma de decisiones de numerosas organizaciones.

Como otras ramas de la ciencia y la tecnología se sirve de modelos para representar aquellos aspectos de la realidad que tienen influencia en su ámbito de interés, en este caso las decisiones que optimizan el funcionamiento de un sistema.

Etapas en el diseño de un modelo de optimización:

- 1) Identificación de las posibles decisiones que pueden tomarse en el sistema y su representación en forma de variables: las **variables de decisión**. Normalmente estas variables son de carácter cuantitativo, aunque también son posibles variables cualitativas que determinan una elección entre varias posibles.
- 2) Especificación del conjunto de valores de las variables de decisión que resultan admisibles en el sistema, es decir, el conjunto de **restricciones** que deben cumplir dichas variables. Este se determina teniendo presente la naturaleza física de los elementos del sistema y sus interrelaciones.
- 3) Desarrollo de un modelo de costes del sistema, es decir, determinar el coste/beneficio asociado a cada decisión admisible. Esto supone diseñar una **función objetivo** que asigne a cada conjunto posible de valores de las variables de decisión su valor de coste/beneficio.

Propósito de la asignatura:

Analizar métodos y procedimientos que permitan identificar, especificar y resolver problemas de optimización de tipo lineal con variables de decisión continuas y discretas.

Contenido:

Comienza con la identificación de problemas sencillos de programación matemática y su representación utilizando lenguajes de modelado para este tipo de problemas (OPL, OML, AMPL, GAMS, LINGO, etc.).

Después se introducen los principales métodos de resolución de problemas lineales continuos y enteros, métodos que operan en el interior de los lenguajes de modelado.

Finalmente se analizan y resuelven problemas de optimización reales que aparecen en los entornos industriales.

PROGRAMA

Parte I: Modelado de problemas de optimización lineal

Tema 1: Modelos lineales de optimización con variables continuas.

Tema 2: Modelos lineales de optimización con variables enteras.

Tema 3: Lenguajes de modelado de problemas de optimización.

Parte II: Métodos de resolución de problemas lineales

Tema 4: Programación lineal con variables continuas: método del Simplex.

Tema 5: Dualidad y sensibilidad de los modelos lineales

Tema 6: Programación entera: bifurcación-acotación y planos de corte.

Parte III: Aplicaciones industriales de la programación matemática

Tema 7: Optimización de redes logísticas.

Tema 8: Optimización de procesos industriales.

Tema 9: Aproximación lineal de problemas no lineales

BIBLIOGRAFIA

(1) Investigación Operativa. Optimización

Sixto Ríos Insua

Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S.A., Madrid.

(2) Investigación Operativa. Modelos determinísticos y estocásticos

Sixto Ríos Insua, Alfonso Mateos Caballero, M^a Concepción Bielza Lozoya y Antonio Jiménez Martín

Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S.A., Madrid 2004.

(3) Problemas de Investigación Operativa. Programación Lineal y Extensiones

Sixto Ríos Insua, David Ríos Insua, Alfonso Mateos Caballero, Jacinto Martín Jiménez y Antonio Jiménez Martín

Editorial Ra-Ma, Madrid 2006.

(4) Manual de Referencia de OPL

(5) Model Building in Mathematical Programming

Paul W. Williams

Editorial JOHN WILEY AND SONS

Tema 1: (3) Capítulo 1: Construcción de modelos: páginas 2-49

Tema 2: (3) Capítulo 6: Programación entera: páginas 317-366

Tema 3: (4)

Tema 4: (2) Capítulo 2: Programación lineal: páginas 27-78

Tema 5: (2) Capítulo 2: Programación lineal: páginas 79-120

Tema 6: (2) Capítulo 4: Programación entera 171-200

Tema 7: (5)

Tema 8: (5)

Tema 9: (5)

Plan de trabajo

Cada tema constará de una presentación teórica acompañada de abundantes problemas prácticos. Para ello el alumno dispondrá de un documento *.pdf* con los contenidos esenciales de la materia y una referencia bibliográfica detallada. Al finalizar cada tema el alumno deberá realizar un ejercicio relativo a la correspondiente materia que deberá entregar por escrito en la fecha señalada. Las fechas de inicio de cada tema y entrega límite de las memorias de los ejercicios aparecen en la siguiente tabla:

Calendario de la asignatura		
Temas	Inicio	Entrega de ejercicios
Tema 1	7 octubre	16 octubre
Tema 2	17 octubre	31 octubre
Tema 3	1 noviembre	13 noviembre
Tema 4	14 noviembre	27 noviembre
Tema 5	28 noviembre	11 diciembre
Tema 6	12 diciembre	8 enero
Tema 7	9 enero	21 enero
Tema 8	22 enero	31 enero
Tema 9	1 febrero	12 febrero

Las memorias deberán escribirse en formato *word* o *pdf* con un contenido en el que conste el enunciado del problema , el planteamiento de la solución y los resultados. El código OPL de los correspondientes programas no tiene que enviarse en archivos originales, se *pegará* en la correspondiente memoria, en el apartado de planteamiento de la solución.

La calificación final de la asignatura se hará en base a los ejercicios entregados a lo largo del curso, reservándose el profesor la posibilidad de realizar en su caso una prueba presencial, real o virtual, que le asegure que el grado de competencia adquirido por el alumno en la materia se corresponde con la calificación asignada.