# Tema 1: Modelos lineales de optimización con variables continuas.

**Objetivos del tema:**

- Introducir los problemas de programación lineal.
- Aprender a formular el modelo de un problema de programación lineal.
- Estudiar las propiedades de los modelos de programación lineal.
- Conocer la expresión de un modelo de programación lineal con lenguajes de modelado.
- Conocer los elementos básicos del lenguaje de modelado OPL (*Optimization Programming Language*).
- Saber los tipos de soluciones que pueden tener los problemas de programación lineal.
- Modelar matemáticamente y resolver en OPL varios problemas de programación lineal

**Introducción a la programación lineal**

El objetivo de un modelo matemático es reproducir la realidad de la forma más fiel posible a fin de entender cómo se comporta y poder obtener respuestas a determinadas acciones.

La programación lineal es un tipo de modelo matemático que se desarrolló a partir de la Segunda Guerra Mundial para resolver cierto tipo de problemas de asignación de recursos entre distintas actividades.

Después de la guerra las aplicaciones de la programación lineal se extendieron a una amplia variedad de problemas, de manera que hoy se utiliza en campos como la ingeniería, la economía, la gestión, y muchas otras áreas de la ciencia, la técnica y la industria.

La programación lineal fue formulada por George B. Dantsig alrededor de 1947, cuando trabajaba como consejero matemático para la Fuerza Aérea de Estados Unidos en el desarrollo de un sistema automático de planificación temporal de despliegue, entrenamiento y abastecimiento logístico.

Debido a que la Fuerza Aérea denomina *programas* a sus diversos planes y proyectos a implementar, en el primer artículo publicado por Dantzig se refiere a este problema como *programación en una estructura lineal*.

El término *programación lineal* fue acuñado por el economista y matemático T.C. Koopmans en el verano de 1948 cuando colaboraba con el propio Dantzig.

En 1949, Dantzig publicó el *método del simplex* para resolver programas lineales, método que fue ampliamente aceptado por su capacidad de producir soluciones en un tiempo razonable.

La programación lineal estudia la optimización (minimización o maximización) de una función lineal que satisface un conjunto de restricciones lineales de igualdad y/o desigualdad.

**Formulación de un modelo de programación lineal**

En el proceso de formulación de un modelo de programación lineal hay que dar los siguientes pasos:

1. Determinación de las **variables de decisión**. Representan los elementos del sistema a modelar que son controlables por el decisor. En los modelos lineales continuos estas variables toman como valores números reales y se representan por letras con subíndices $x_1, x_2, \ldots$ como se acostumbra a hacer con las variables matemáticas, o literales alusivos a su significado: *peso*, *valor, etc.* En el primer caso también se utiliza la representación como vector de un conjunto indexado de variable: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$

2. Determinación de las **restricciones**. Representan las limitaciones prácticas de determinados recursos o imposiciones físicas de la realidad. Se expresan como ecuaciones e inecuaciones lineales de las variables de decisión. Matemáticamente adoptan una de las siguientes formas:

$$g_i(\boldsymbol{x}) \geq b_i; \quad g_i(\boldsymbol{x}) \leq b_i; \quad g_i(\boldsymbol{x}) = b_i$$
$$i = 1, \ldots m; \ con\ g_i\ una\ \ función\ lineal\ en\ x$$

3. Formulación de la **función objetivo**. Se trata de la función que mide la calidad de la solución y que hay que optimizar (maximizar un beneficio o minimizar un coste). También es una función lineal de todas o parte de las variables de decisión.

$$Maximizar\ z = f(x); \quad Minimizar\ z = f(x)$$

Vamos a ver estos pasos en la formulación de un modelo de programación lineal utilizando el siguiente problema de asignación de recursos:

**Problema 1: asignación de recursos**

En una fábrica de cerveza se producen tres tipos distintos: rubia, negra y de baja graduación, y para ello se utilizan dos materias primas: malta y levadura. En la siguiente tabla se especifican: a) la cantidad de materias primas consumidas para producir una unidad de cada tipo de cerveza; b) las cantidades disponibles de cada materia prima; y c) el precio unitario de venta de cada tipo de cerveza.

| | Consumo de materias primas por cada tipos de cerveza | | | |
|---|---|---|---|---|
| Materia prima | *rubia* | *negra* | *baja* | Disponibilidad |
| *malta* | 1 | 2 | 2 | 30 |
| *levadura* | 2 | 1 | 2 | 45 |
| Precio de venta | 7 | 4 | 3 | |

Se trata de conocer la cantidad a fabricar de cada tipo de cerveza de manera que el beneficio sea máximo.

**Solución**

Los tres elementos que definen un problema de programación lineal son: variables de decisión, restricciones y función objetivo.

**Variables de decisión**

Del enunciado del problema se desprende que las variables de decisión son las producciones a fabricar de cada tipo de cerveza:

$$x_1 = \textit{producción de cerveza rubia}$$
$$x_2 = \textit{producción de cerveza negra}$$
$$x_3 = \textit{producción de cerveza de baja graduación}$$

**Restricciones**

Las restricciones en este caso imponen que las materias primas utilizadas en la fabricación de los tres tipos de cerveza no deben sobrepasar las cantidades disponibles:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 30 \quad (\textit{malta utilizada} \le \textit{malta disponible})$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 45 \quad (\textit{levadura utilizada} \le \textit{levadura disponible})$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0 \qquad (\textit{no negatividad})$$

**Función objetivo**

En este caso el objetivo es maximizar el beneficio, que viene dado por la suma de los precios de venta de la producción:

$$\textit{Maximizar } z = 7x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

El modelo matemático de programación lineal para el problema de asignación de recursos queda formulado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &Maximizar\ Z = 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ &sujeto\ a: \quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ &\qquad\qquad 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 45 \\ &\qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

En este primer módulo de la asignatura nos vamos a ocupar de modelar problemas de programación lineal y resolver los modelos utilizando los lenguajes de modelado disponibles comercialmente. En el módulo segundo abordaremos los algoritmos internos que utilizan estos lenguajes. Sin entrar de momento en los detalles de estos lenguajes, la expresión del problema anterior en dos modernos lenguajes de modelado (OPL y OML) sería la siguiente:

**Modelo OPL**

```
// Variables de decisión
dvar float+  x1;
dvar float+  x2;
dvar float+  x3;

// Función objetivo
maximize 7*x1 + 4*x2 + 3*x3;

// Restricciones
subject to
{
     x1 + 2*x2 + 2*x3 <= 30;
 2*x1 +      x2 + 2*x3 <= 45;
}
```

**Modelo OML**

```
Model[
 // Variables de decisión
 Decisions[ Reals[0,Infinity],
  x1, x2, x3, z],

 // Función objetivo
 Goals[Maximize [z ]],

 // Restricciones
 Constraints
 [z==7*x1 + 4*x2 + 3*x3,
   x1 + 2*x2 + 2*x3 <= 30,
   2*x1 +   x2 + 2*x3 <= 45
 ]]
```

Es evidente que estos lenguajes disponen de una sintaxis muy próxima a la pura expresión matemática. El texto en verde corresponde a comentarios, y el azul a palabras reservadas de cada lenguaje. La solución que nos dan los respectivos sistemas son la siguientes:

**Solución OPL**

```
// solution (optimal) with objective 160
x1 = 20;
x2 = 5;
x3 = 0;
```

**Solución OML**

```
Decisions:
x1: 20
x2: 5
x3: 0
z: 160
```

**Propiedades del modelo lineal**

La formulación algebraica general de un problema de programación lineal de variables continuas podemos hacerla de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&\textit{Maximizar ó Minimizar} \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
&\textit{sujeta a}: \\
&\qquad\qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le ó \ge ó = b_1 \\
&\qquad\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le ó \ge ó = b_2 \\
&\qquad\qquad \ldots \\
&\qquad\qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le ó \ge ó = b_1 \\
&\qquad\qquad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0
\end{aligned}
$$

Cuatro son las propiedades generales que debe cumplir un problema para poderse plantear como un problema de programación lineal:

- **Proporcionalidad**
  La contribución al coste y a las restricciones es directamente proporcional al valor de las variables de decisión.

- **Aditividad**
  El coste y las restricciones son la suma directa de los valores aportados por las variables de decisión.

- **Divisibilidad**
  Las variables de decisión pueden dividirse en cualquier tipo de fracción, es decir, toman como valores números reales.

- **Determinismo**
  Las valores de $a_{ij}, c_i, b_j \quad para \;\; i = 1,2,\ldots,n, \quad j = 1,2,\ldots,m$ mantienen su valor constante.

**Problema 2: producción**

Una compañía dispone de un máximo de 14 horas diarias de mano de obra para fabricar diariamente dos productos p1 y p2. Una unidad de producto p1 necesita 4 horas mientras que una unidad de producto p2 requiere 3. Para la producción se necesita una materia prima de la que se dispone de 12 unidades diarias, requiriéndose 2 unidades para producir una unidad de p1, y 3 unidades para producir una unidad de p2. ¿Qué cantidad de cada producto maximiza la producción?

**Solución**

**Variables de decisión**

$x_1$ Producción diaria de p1

$x_2$ Producción diaria de p2

**Restricciones**

Horas requeridas para producir x1 unidades de p1 y x2 unidades de x2 < horas disponibles al día de mano de obra

Materia prima requerida para producir x1 unidades de p1 y x2 unidades de p2 < unidades de materia prima disponible al día

$$4x_1 + 3x_2 \leq 14$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

**Función objetivo**

Hay que maximizar la producción total diaria de la compañía

$$Maximizar \quad z = x_1 + x_2$$

El modelo de programación lineal para este problema sería:

$$\begin{aligned} &Maximizar \quad z = x_1 + x_2 \\ &sujeta\ a: \\ &\qquad 4x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ &\qquad 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ &\qquad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

**Interpretación económica del problema de programación lineal**

En el **Problema 1** se trataba de asignar dos recurso limitados (malta y levadura) a tres actividades de la compañía (fabricación de cerveza rubia, negra o de baja graduación) optimizando (maximizando) el beneficio global. Conocíamos la disponibilidad (cantidad) de cada recurso, el consumo de recursos por cada actividad, y el beneficio que se obtiene por unidad de producto fabricado de cada actividad. Este ejemplo nos permite interpretar un problema general de programación matemática como un problema de asignación óptima de recursos a una serie de actividades:

Problema general de programación lineal
(expresado en forma estándar de maximización)

$$
\begin{aligned}
&\textit{Maximizar} \quad z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \\
&\textit{sujeta a}: \\
&\qquad a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \le b_1 \\
&\qquad a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \le b_2 \\
&\qquad \ldots \\
&\qquad a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \le b_1 \\
&\qquad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0
\end{aligned}
$$

Interpretación económica
(asignación óptima de recursos)

| | Consumo de recursos por unidad de actividad | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Actividad | | | | |
| Recursos | 1 | 2 | ... | n | Cantidad de recursos disponibles |
| 1 | $a_{11}$ | $a_{12}$ | ... | $a_{1n}$ | $b_1$ |
| 2 | $a_{21}$ | $a_{22}$ | ... | $a_{2n}$ | $b_2$ |
| . | ... | ... | ... | ... | ... |
| . | | | | | |
| m | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | ... | $a_{mn}$ | $b_m$ |
| Contribución a z por unidad de actividad | $c_1$ | $c_2$ | ... | $c_n$ | |

$$
\begin{aligned}
&z = \textit{valor del rendimiento} \\
&x_j = \textit{nivel de la actividad } j \ (\textit{para } j = 1,2,\ldots,n) \\
&c_j = \textit{incremento en z que se obtiene al aumentar una unidad el nivel de la actividad } j \\
&b_i = \textit{cantidad de recurso i disponible para asignarse a las actividades } (\textit{para } i = 1,2,\ldots,n) \\
&a_{ij} = \textit{cantidad del recurso i consumido por cada unidad de la actividad } j
\end{aligned}
$$

**Introducción al lenguaje de modelado OPL (*Optimization Programming Language*)**

Aunque el estudio detallado de los lenguajes de modelado lo abordaremos en el tema 3, en este punto introduciremos el lenguaje OPL que utilizaremos en la resolución de los problemas que plantearemos a lo largo de la asignatura. La razón está en que los recursos de OPL necesarios para expresar los pequeños modelos de esta introducción son sencillos y bastante intuitivos.
La estructura general de un programa OPL es la siguiente:

```
// Variables de decisión
dvar float+  Variable de decisión 1;
…
dvar float+  Variable de decisión n;

// Función objetivo
maximize Función objetivo;

// Restricciones
subject to
{
    Restricción 1;
    …
    Restricción m
}
```

El texto precedido de // es una línea de comentario sin valor sintáctico.

Las variables de decisión no negativas se declaran con las palabras reservadas dvar float+ y se representan con literales: x1, var, peso,…

La función objetivo se declara con las palabras reservadas maximize o minimize

Las restricciones se declaran entre llaves {..} precedidas de las palabras reservadas subject to

Las declaraciones de variables, función objetivo y restricciones terminan en ;

Los símbolos de los operadores lineales son + para la suma y * para la multiplicación.

Los símbolos relacionales de las restricciones son: == para la igualdad; <= para menor o igual; y >= para mayor o igual.

Aplicando la sintaxis OPL al modelo lineal del Problema 1 resulta lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
&\textit{Maximizar} \ z = 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
&\textit{sujeto a:} \quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 30 \\
&\qquad\qquad\ \ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 45 \\
&\qquad\qquad\ \ x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

OPL →

```
// Variables de decisión
dvar float+  x1;
dvar float+  x2;
dvar float+  x3;

// Función objetivo
maximize 7*x1 + 4*x2 + 3*x3;

// Restricciones
subject to
{
  x1 + 2*x2 + 2*x3 <= 30;
  2*x1 + x2 + 2*x3 <= 45;
}
```

Los pasos necesarios para descargar OPL y crear proyectos que permitan ejecutar modelos OPL aparecen en el documento: **IDE OPL.pdf**

## Representación gráfica de los problemas de programación lineal

Un problema de programación lineal con 2 variables de decisión se puede representar gráficamente en el plano cuyas coordenadas son las propias variables. Para ello se representan las rectas que resultan de convertir las restricciones de desigualdad en ecuaciones, y se determina con el signo de desigualdad el semiplano que define cada restricción (marcado en el dibujo con una flecha verde perpendicular a la recta). La región factible queda determinada por la intersección de los semiplanos que definen las restricciones. Por ejemplo, representemos gráficamente el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} &\textit{Maximizar}\ \ z = x_1 + 3x_2 \\ &\textit{sujeto a}: \quad x_1 + x_2 \le 6 \\ &\qquad\qquad\quad -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ &\qquad\qquad\quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Las rectas paralelas de iso-beneficio aumentan el valor de z conforme se alejan del origen en el cuadrante positivo. Es evidente que el valor de z de la recta que pasa por el punto extremo (2,4) de la región factible determina el valor óptimo del problema (z=14). Las rectas con valores de z superiores a 14 ya no itersectan la región factible. Veremos en el tema 4 que el óptimo de un problema lineal es siempre un punto extremo de la región factible. Para 2 variables un vértice del polígono factible.

Podemos comprobar la solución resolviendo el problema en OPL:

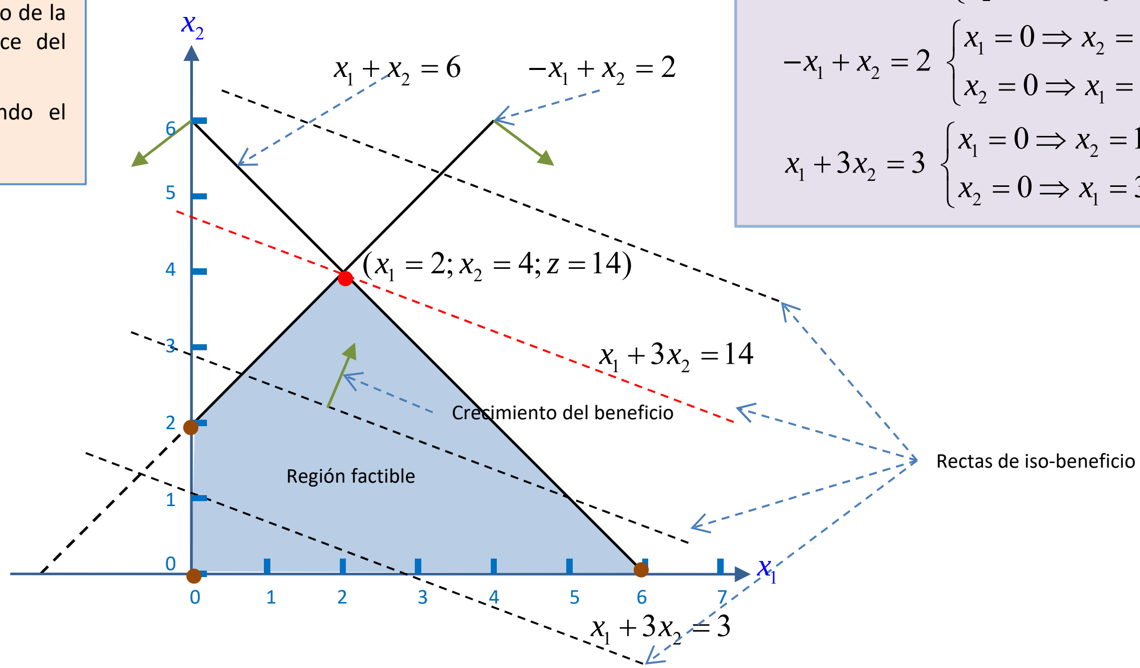
```
//Variables de decisión
dvar float+ x1;
dvar float+ x2;

//Función objetivo
maximize x1 + 3*x2;

//Restricciones
subject to
  {
   x1 + x2 <= 6;
  -x1 + x2 <= 2;
  }

// solution (optimal) with objective 14
x1 = 2;
x2 = 4;
```

Para dibujar las rectas correspondientes a las restricciones y a valores constantes de la función objetivo (iso-beneficio) se hallan los cortes con los ejes :

$$x_1 + x_2 = 6 \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 6 \\ x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 6 \end{cases}$$

$$-x_1 + x_2 = 2 \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \\ x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \end{cases}$$

$$x_1 + 3x_2 = 3 \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1 \\ x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \end{cases}$$



**Clasificación de los problemas de programación lineal según el tipo de solución**

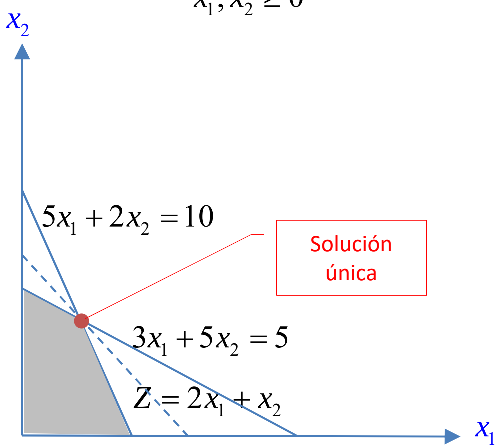
Atendiendo al tipo de solución podemos clasificar los problemas de programación en las siguientes categorías:

$$\textit{problema de programación lineal}\begin{cases} \textit{factible}\begin{cases}\textit{solución única}\\ \textit{múltiples soluciones}\end{cases} \\ \\ \textit{no factible} \\ \textit{no acotado}\begin{cases}\textit{con z infinito}\\ \textit{con z finito (rayo óptimo)}\end{cases}\end{cases}$$

Veamos con la ayuda de la representación gráfica de la región factible un ejemplo de cada tipo.

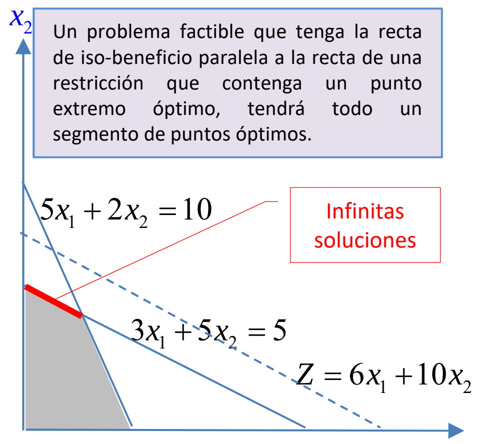
**Problema factible: solución única**

$$\begin{aligned} &\textit{Maximizar}\ \ z = 2x_1 + x_2 \\ &\textit{sujeto a}: \quad 5x_1 + 2x_2 \le 10 \\ &\qquad\qquad\quad 3x_1 + 5x_2 \le 15 \\ &\qquad\qquad\quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



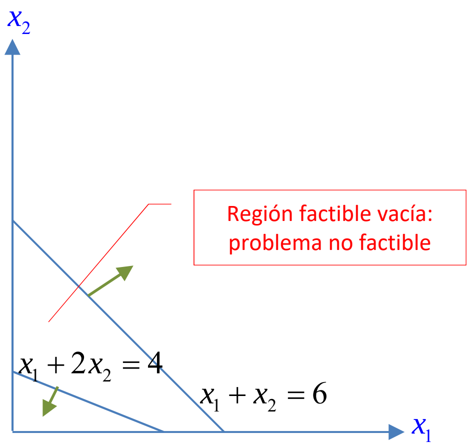

**Problema factible: soluciones múltiples**

$$\begin{aligned} &\textit{Maximizar}\ \ z = 6x_1 + 10x_2 \\ &\textit{sujeto a}: \quad 5x_1 + 2x_2 \le 10 \\ &\qquad\qquad\quad 3x_1 + 5x_2 \le 15 \\ &\qquad\qquad\quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$




**Problema no factible**

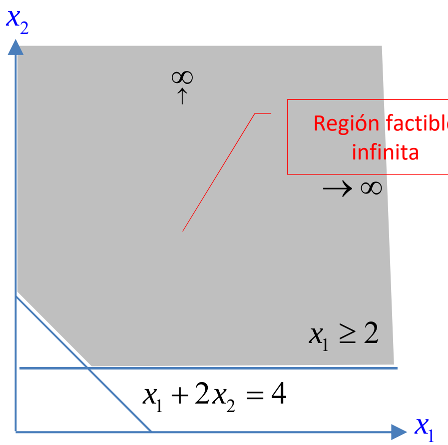
$$\begin{aligned} &\textit{Maximizar}\ \ z = x_1 + 3x_2 \\ &\textit{sujeto a}: \quad x_1 + x_2 \ge 6 \\ &\qquad\qquad\quad x_1 + 2x_2 \le 4 \\ &\qquad\qquad\quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



**Clasificación de los problemas de programación lineal según el tipo de solución (continuación)**

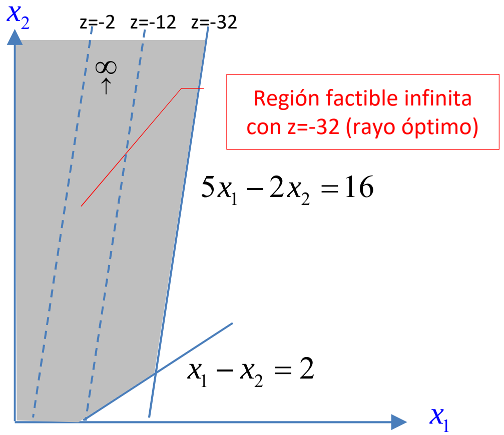
**Problema no acotado**
**(z infinito)**

$$\begin{aligned} &Maximizar\ \ z = 2x_1 + 5x_2 \\ &sujeto\ a: \quad x_1 + x_2 \geq 4 \\ &\qquad\qquad\quad x_1 \geq 2 \\ &\qquad\qquad\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



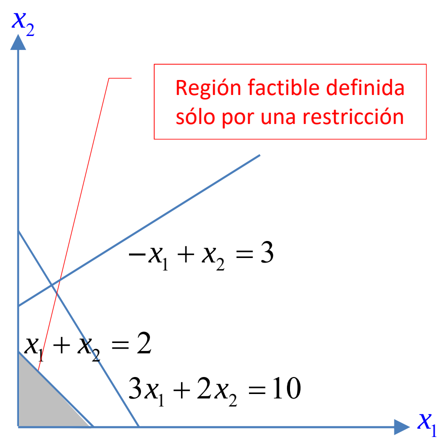

**Problema no acotado**
**(z finito, rayo óptimo)**

$$\begin{aligned} &Minimizar\ \ z = -10x_1 + 4x_2 \\ &sujeto\ a: \quad x_1 - x_2 \leq 2 \\ &\qquad\qquad\quad 5x_1 - 2x_2 \leq 16 \\ &\qquad\qquad\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$




**Restricciones redundantes**

$$\begin{aligned} &Maximizar\ \ z = 2x_1 + x_2 \\ &sujeto\ a: \quad x_1 + x_2 \leq 2 \\ &\qquad\qquad\quad -x_1 + x_2 \leq 3 \\ &\qquad\qquad\quad 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ &\qquad\qquad\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$




Los lenguajes de modelado como OPL suelen informar del carácter factible, no factible (*infeasible*)o no acotado (*unbounded)* de la solución.

**Problema 3: mezcla de aceites**

Una fábrica produce aceite mezclando aceites refinados, dos de origen vegetal y tres de origen no vegetal. En un mes sólo es posible refinar 200 toneladas de vegetal y 250 de no vegetal. El aceite resultante debe cumplir un valor de dureza comprendido entre 3 y 6. El costo de una tonelada para cada aceite refinado junto con su dureza aparecen en la siguiente tabla:

| | *VEG_1* | *VEG_2* | *NOVEG_1* | *NOVEG_2* | *NOVEG_3* |
|---|---|---|---|---|---|
| *costo* | 110 | 120 | 130 | 110 | 115 |
| *dureza* | 8,8 | 6,1 | 2,0 | 4,2 | 5,0 |

Se trata de refinar las cantidades apropiadas de cada aceite a fin de maximizar el beneficio de la producción final sabiendo que una tonelada del aceite producido se vende a 150,

**Solución**

**Variables de decisión**

$x_1 = \textit{cantidad de aceite refinado VEG\_1}$

$x_2 = \textit{cantidad de aceite refinado VEG\_2}$

$x_3 = \textit{cantidad de aceite refinado NOVEG\_1}$

$x_4 = \textit{cantidad de aceite refinado NOVEG\_2}$

$x_5 = \textit{cantidad de aceite refinado NOVEG\_3}$

$y = \textit{cantidad de aceite a producir}$

**Restricciones:**

$x_1 + x_2 \leq 200$ $(\textit{aceite vegetal refinado} \leq \textit{capacidad de refino vegetal})$

$x_3 + x_4 + x_5 \leq 250$ $(\textit{aceite no vegetal refinado} \leq \textit{capacidad de refino no vegetal})$

$8{,}8x_1 + 6{,}1x_2 + 2x_3 + 4{,}2x_4 + 5x_5 \leq 6y$ $(\textit{límite superior de dureza del aceite producido})$

$8{,}8x_1 + 6{,}1x_2 + 2x_3 + 4{,}2x_4 + 5x_5 \geq 3y$ $(\textit{límite inferior de dureza del aceite producido})$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = y$ $(\textit{suma de las cantidades de los aceites refinados} = \textit{cantidad de aceite producido})$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y \geq 0$ $(\textit{no negatividad})$

**Función objetivo:**

$\textit{Maximizar } z = 150y - 110x_1 - 120x_2 - 130x_3 - 110x_4 - 115x_5$ $(\textit{valor aceite producido} - \textit{coste aceites refinados})$

## Problema 3: expresión OPL del modelo

**Modelo OPL**

```
//Variables de decisión
dvar float+ x1;
dvar float+ x2;
dvar float+ x3;
dvar float+ x4;
dvar float+ x5;
dvar float+ y;

//Función objetivo
maximize 150*y - 110*x1 - 120*x2 - 130*x3 - 110*x4 - 115*x5;

//Restricciones
subject to
{
  x1 + x2 <= 200;
  x3 + x4 + x5 <= 250;
  8,8*x1+6,1*x2+2*x3+4,2*x4+5*x5 <=6*y;
  8,8*x1+6,1*x2+2*x3+4,2*x4+5*x5 >=3*y;
  x1 + x2 + x3 + x4 + x5 == y;
}
```

**Solución**

```
// solution (optimal) with objective 17592,5925925926
y  = 450;
x1 = 159,26;
x2 = 40,741;
x3 = 0;
x4 = 250;
x5 = 0;
```

**Problema 4: asignación de tareas**

Una compañía monta un sistema de producción en un proceso dividido en 4 tareas denominadas M, N, P y Q que pueden realizarse en cualquier orden e indistintamente por 4 equipos. En la siguiente tabla aparecen: a) El tiempo en horas que emplearía cada equipo en realizar la tarea completa; b) Las horas disponibles por cada equipo; y c) El coste de la hora de trabajo de cada equipo. Se quiere conocer el número de horas de trabajo que deben asignarse a cada equipo para que se minimice el coste total del montaje del sistema.

| | Tareas | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Equipo | M | N | P | Q | Horas disponibles | Coste/hora |
| 1 | 52 | 212 | 25 | 60 | 220 | 68,3 |
| 2 | 57 | 218 | 23 | 57 | 300 | 69,5 |
| 3 | 51 | 201 | 26 | 54 | 245 | 71 |
| 4 | 56 | 223 | 21 | 55 | 190 | 71,2 |

**Solución**

**Variables de decisión**

$$M_i, N_i, P_i, Q_i; \quad i = 1,2,3,4$$

Tiempo asignado al equipo i para realizar las tareas M, N, P, Q del sistema

**Restricciones**

$$M_1 + N_1 + P_1 + Q_1 \le 220$$
$$M_2 + N_2 + P_2 + Q_2 \le 300$$
$$M_3 + N_3 + P_3 + Q_3 \le 245$$
$$M_4 + N_4 + P_4 + Q_4 \le 190$$

Limitación de las horas de trabajo disponibles por cada equipo

$$M_1/52 + M_2/57 + M_3/51 + M_4/56 = 1$$
$$N_1/212 + N_2/218 + N_3/201 + N_4/223 = 1$$
$$P_1/25 + P_2/23 + P_3/26 + P_4/21 = 1$$
$$Q_1/60 + Q_2/57 + Q_3/54 + Q_4/55 = 1$$

Imposición de que terminen las 4 tareas que pueden ser realizadas parcialmente por cada uno de los equipos

$$M_i, N_i, P_i, Q_i \ge 0; \quad i = 1,2,3,4$$

No negatividad de la variables de decisión

**Función de coste**

$$Minimizar\ z = 68,3(M_1 + N_1 + P_1 + Q_1) + 69,5(M_2 + N_2 + P_2 + Q_2) + 71(M_3 + N_3 + P_3 + Q_3) + 71,2(M_4 + N_4 + P_4 + Q_4)$$

No negatividad de la variables de decisión

## Problema 4: expresión OPL

```
//Variables de decisión
dvar float+ M1;
dvar float+ M2;
dvar float+ M3;
dvar float+ M4;
dvar float+ N1;
dvar float+ N2;
dvar float+ N3;
dvar float+ N4;
dvar float+ P1;
dvar float+ P2;
dvar float+ P3;
dvar float+ P4;
dvar float+ Q1;
dvar float+ Q2;
dvar float+ Q3;
dvar float+ Q4;

//Función objetivo
minimize 68.3*(M1+N1+P1+Q1)+69.5*(M2+N2+P2+Q2)+
           71*(M3+N3+P3+Q3)+71.2*(M4+N4+P4+Q4);

//Restricciones
subject to
{
   M1 + N1 + P1 + Q1 <= 220;
   M2 + N2 + P2 + Q2 <= 300;
   M3 + N3 + P3 + Q3 <= 245;
   M4 + N4 + P4 + Q4 <= 190;

   M1/52 + M2/57 + M3/51 + M4/56 == 1;
   N1/212 + N2/218 + N3/201 + N4/223 == 1;
   P1/25 + P2/23 + P3/26 + P4/21 == 1;
   Q1/60 + Q2/57 + Q3/54 + Q4/55 == 1;
  }
```

```
// solution (optimal) with objective 23162.1781094527
M1 = 52;
N1 = 10.547;
P1 = 0;
Q1 = 0;
M2 = 0;
N2 = 0;
P2 = 0;
Q2 = 0;
M3 = 0;
N3 = 191;
P3 = 0;
Q3 = 54;
M4 = 0;
N4 = 0;
P4 = 21;
Q4 = 0;
```

Cuando estudiemos más a fondo en el Tema 3 el lenguaje OPL veremos que este modelo puede expresarse de forma más concisa haciendo uso de las variables indexadas y las expresiones iterativas.

## Formulación matricial del problema de programación lineal

Con frecuencia se utiliza la expresión matricial del problema de programación lineal:

$$
\begin{aligned}
&\textit{Maximizar o Minimizar } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
&\textit{sujeto a:} \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \rhd b_1 \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \rhd b_m \\
&\rhd \in \{\leq, \geq, =\} \\
&x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

expresión matricial

$$
\begin{aligned}
&\textit{Maximizar o Minimizar } z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\
&\textit{sujeto a} \quad \boldsymbol{Ax} \rhd \boldsymbol{b} \\
&\qquad\qquad\quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}; \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}; \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \ldots \\ c_n \end{bmatrix};
$$

Por ejemplo, para el problema 3 de mezcla de aceites tendremos la siguiente expresión matricial:

$$
\begin{aligned}
&\textit{Maximizar } z = -110x_1 - 1204x_2 - 130x_3 - 110x_4 - 115x_5 + 150y \\
&x_1 + x_2 \leq 200 \\
&x_3 + x_4 + x_5 \leq 250 \\
&8{,}8x_1 + 6{,}1x_2 + 2x_3 + 4{,}2x_4 + 5x_5 - 6y \leq 0 \\
&-8{,}8x_1 - 6{,}1x_2 - 2x_3 - 4{,}2x_4 - 5x_5 + 3y \leq 0 \\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - y \leq 0 \\
&-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + y \leq 0 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y \geq 0
\end{aligned}
$$

Hemos convertido todas las relaciones a “menor o igual” multiplicando por -1 los dos miembros de las restricciones con relación “mayor o igual”

La restricción de “igualdad” se convierte en dos restricciones: “mayor o igual”, y “menor o igual”

expresión matricial

$$
\begin{aligned}
&\textit{Maximizar} \quad z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\
&\textit{sujeto a} \quad \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b} \\
&\qquad\qquad\quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 8{,}8 & 6{,}1 & 2 & 4{,}2 & 5 & -6 \\ -8{,}8 & -6{,}1 & -2 & -4{,}2 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ y \end{bmatrix}; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 200 \\ 250 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -110 \\ -120 \\ -130 \\ -110 \\ -115 \\ 150 \end{bmatrix}
$$

**Problema general de la dieta**

El problema de la dieta consiste en determinar las cantidades de distintos nutrientes que deben ingerirse para asegurar ciertas condiciones de nutrición, minimizando el coste de los nutrientes. Se conocen los contenidos nutritivos de un número de alimentos, sus precios, y la cantidad mínima diaria de nutrientes aconsejada. El problema consiste en determinar la cantidad de cada alimento que debe comprarse de manera que se satisfagan los mínimos aconsejados con un precio total mínimo.

Si denominamos:

$$m = \text{número de nutrientes}$$

$$n = \text{número de alimentos}$$

$$a_{ij} = \text{cantidad de nutriente } i \text{ en una unidad de alimento } j$$

$$b_j = \text{cantidad mínima de nutriente } i \text{ aconsejada}$$

$$c_j = \text{precio unitario del alimento } j$$

**Variables de decisión**

$$x_j = \text{cantidad que debe comprarse del alimento } j$$

**Restricciones**

Como la cantidad total de un nutriente dado *i es la suma* de las cantidades de los nutrientes en todos los alimentos, se deben cumplir las siguientes restricciones:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i; \qquad i = 1, \ldots m$$

$$x_j \geq 0; \quad j = 1, \ldots, n$$

**Función de costo**

Hay que minimizar el precio total de la dieta:

$$Minimizar \;\; z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

**Problema 5: dieta**

Consideremos el caso de 4 nutrientes N1, N2, N3, N4 que forman parte de 5 alimentos A1, A2, A3, A4, A5. En la siguiente tabla aparecen: 1) Cantidad aconsejada de cada nutriente, 2) Contenido de nutriente que tiene cada alimento, y 3) Coste unitario de cada alimento. Debemos calcular la cantidad de cada alimento que debemos comprar para garantizar la cantidad aconsejada de cada nutriente y con coste total mínimo.

| Nutrientes | Cantidad aconsejada | Contenido de nutrientes de cada alimento | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 |
| N1 | 74,2 | 78,6 | 70,1 | 80,1 | 67,2 | 77,0 |
| N2 | 14,7 | 6,50 | 9,40 | 8,80 | 13,7 | 30,4 |
| N3 | 0,14 | 0,02 | 0,09 | 0,03 | 0,14 | 0,41 |
| N4 | 0,55 | 0,27 | 0,34 | 0,30 | 1,29 | 0,86 |
| Coste de los alimentos | | 1 | 0,5 | 2 | 1,2 | 3 |

**Solución**

**Variables de decisión**

$$x_j = cantidad\ que\ debe\ comprarse\ del\ alimento\ Aj; \quad j = 1,2,3,4,5$$

**Restricciones**

$$\begin{bmatrix} 78{,}6 & 70{,}1 & 80{,}1 & 67{,}2 & 77{,}0 \\ 6{,}50 & 9{,}40 & 8{,}80 & 13{,}7 & 30{,}4 \\ 0{,}02 & 0{,}09 & 0{,}03 & 0{,}14 & 0{,}41 \\ 0{,}27 & 0{,}34 & 0{,}30 & 1{,}29 & 0{,}86 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 74{,}2 \\ 14{,}7 \\ 0{,}14 \\ 0{,}55 \end{bmatrix}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

**Función objetivo**

$$Minimizar\ \ z = x_1 + 0{,}5x_2 + 2x_3 + 1{,}2x_4 + 3x_5$$

## Problema 5: expresión OPL

**Modelo OPL**

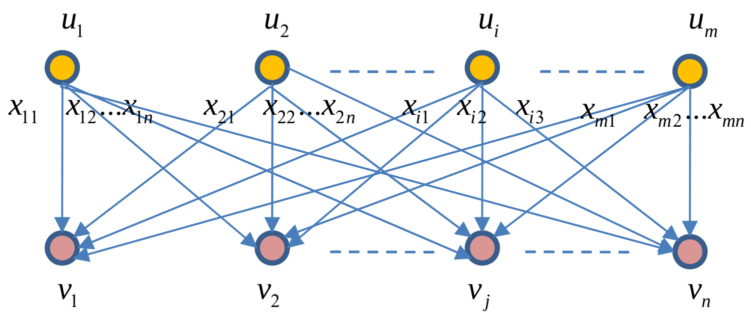
```
//Variables de decisión
dvar float+ x1;
dvar float+ x2;
dvar float+ x3;
dvar float+ x4;
dvar float+ x5;

//Función objetivo
minimize x1 + 0.5*x2 + 2*x3 + 1.2*x4 + 3*x5;

//Restricciones
subject to
{
    78.6*x1 + 70.1*x2 + 80.1*x3 + 67.2*x4 + 77.0*x5 >= 74.2;
    6.50*x1 + 9.40*x2 + 8.80*x3 + 13.7*x4 + 30.4*x5 >= 14.7;
    0.02*x1 + 0.09*x2 + 0.03*x3 + 0.14*x4 + 0.41*x5 >= 0.14;
    0.27*x1 + 0.34*x2 + 0.30*x3 + 1.29*x4 + 0.86*x5 >= 0.55;
}
```

**Solución**

```
// solution (optimal) with objective 0,792769148366363
x1 = 0;
x2 = 1,5303;
x3 = 0;
x4 = 0,023032;
x5 = 0;
```

**Problema general de transporte**

Se debe enviar un cierto producto en determinadas cantidades $u_1, \ldots, u_m$, desde cada uno de los $m$ orígenes, y recibirse en cantidades $v_1, \ldots, v_n$, en cada uno de los $n$ destinos. El problema consiste en determinar las cantidades $x_{ij}$ , que deben enviarse desde el origen $i$ al destino $j$, para conseguir minimizar el coste total del envío.




$m =$ *número de orígenes*

$n =$ *número de destinos*

$u_i =$ *cantidad a enviar desde origen i*

$v_j =$ *cantidad a recibir en el destino j*

$c_{ij} =$ *coste unitario de envio desde el origen i al destino j*

**Variables de decisión.**

$$x_{ij} = \text{cantidad que se envia desde el origen } i \text{ al destino } j$$

**Restricciones.**

$x_{m1} \quad x_{m2} \quad x_{m3}$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = u_1; \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = v_1; \quad j = 1, \ldots, n$$

El primer conjunto de restricciones indica que la cantidad de producto que sale del origen *i debe coincidir con la suma de las cantidades que parten* de ese origen hasta los distintos destinos *j = 1, . . . , n.*
El segundo conjunto de restricciones asegura que el total recibido en el destino *j debe corresponder a la suma de todas las cantidades que llegan* a ese destino y parten de los distintos orígenes *i = 1, . . . , m.*

**Función objetivo.**
Hay que minimizar el coste total del envío, que es la suma de los costes de envío por unidad de producto multiplicado por las cantidades enviadas:

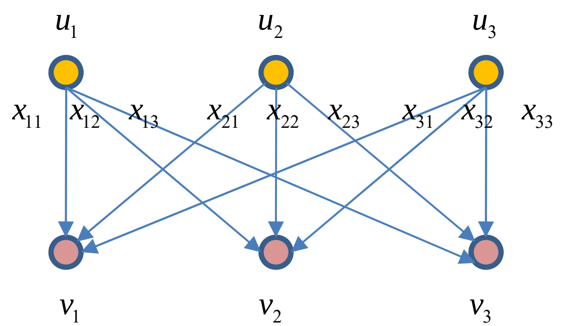
$$\text{Minimizar} \quad z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

**Problema 6: transporte**

Consideremos el problema del transporte de la siguiente figura, con *m = 3 orígenes y n = 3 destinos, y con:*

$u_1 = 2; \quad u_2 = 3; \quad u_3 = 4; \quad v_1 = 5; \quad v_2 = 2; \quad v_3 = 2;$

$c_{11} = 0{,}5; \quad c_{12} = 3; \quad c_{13} = 2; \quad c_{21} = 2; \quad c_{22} = 3; \quad c_{23} = 4; \quad c_{31} = 2; \quad c_{32} = 3; \quad c_{33} = 1{,}5$




**Solución**

**Variables de decisión**

$$x_{ij} = cantidad\ que\ se\ envia\ desde\ el\ origen\ i\ al\ destino\ j; \quad i = 1,2,3; \quad j = 1,2,3$$

**Restricciones**

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 2$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 3$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 4$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 5$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 2$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 2$$

**Función objetivo**

$$Minimizar \quad z = 0,5x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 2x_{21} + 3x_{22} + 4x_{23} + 2x_{31} + 3x_{32} + 1.,5x_{33}$$

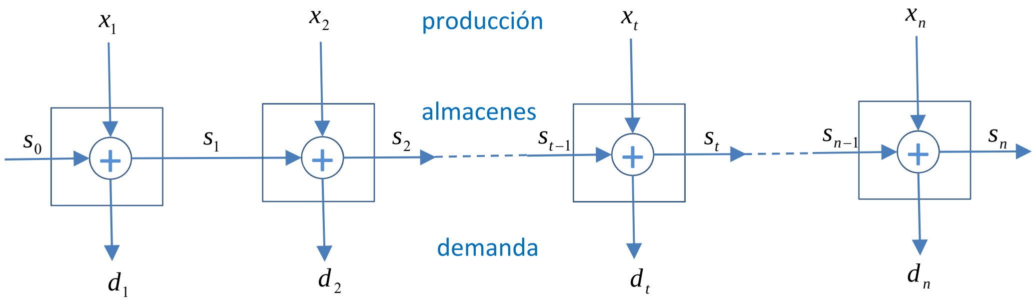
**Problema 6: expresión OPL**

```
// Variables de decisión
dvar float+ x11;
dvar float+ x12;
dvar float+ x13;
dvar float+ x21;
dvar float+ x22;
dvar float+ x23;
dvar float+ x31;
dvar float+ x32;
dvar float+ x33;

//Función objetivo
minimize
0.5*x11+3*x12+2*x13+2*x21+3*x22+4*x23+2*x31+3*x32+1.5*x33;

//Restricciones
subject to
{
x11+x12+x13==2;
x21+x22+x23==3;
x31+x32+x33==4;

x11+x21+x31==5;
x12+x22+x32==2;
x13+x23+x33==2;
}
```

```
// solution (optimal) with objective 16
x11 = 2;
x12 = 0;
x13 = 0;
x21 = 1;
x22 = 2;
x23 = 0;
x31 = 2;
x32 = 0;
x33 = 2;
```

**Planificación de la producción multi-período**

Se trata de determinar las cantidades que hay que producir y almacenar (stock) durante cada día de un período (período de optimización) cuando se conoce una previsión diaria de la demanda para ese período, el coste de la producción y el coste de los almacenes. Se conoce también el valor del *stock* inicial y la capacidad máxima de los almacenes. El objetivo esde minimizar el coste total durante el período.




$n = número\ de\ períodos\ de\ tiempo$

$s_0 = almacenes\ iniciales$

$d_t = demanda\ el\ \ día\ t$

$s_{\max} = capacidad\ máxima\ de\ almacenes$

$c_t = coste\ de\ producción\ en\ el\ período\ t$

$a_t = coste\ de\ almacenamiento\ en\ el\ período\ t$

*En esta situación hay que esperar que el sistema haga una combinación óptimo de la producción y el almacenamiento en función de sus respectivos costos diarios  y la de la demanda que se espera en cada día del período.*

**Variables de decisión**

$$x_t = producción\ en\ el\ período\ t$$

$$s_t = almacenamiento\ en\ el\ período\ t$$

**Restricciones.**

$$s_{t-1} + x_t = d_t + s_t;\quad t = 1,2,\ldots,n$$

Ecuación de balance: lo que se produce un día más lo que había almacenado dl día anterior será igual a la demanda de ese día más lo que se almacena para el día siguiente

$$s_t \le s_{\max};\qquad t = 1,2,\ldots,n$$

No se debe sobrepasar ningún día la capacidad de los almacenes

$$s_t, x_t \ge 0$$

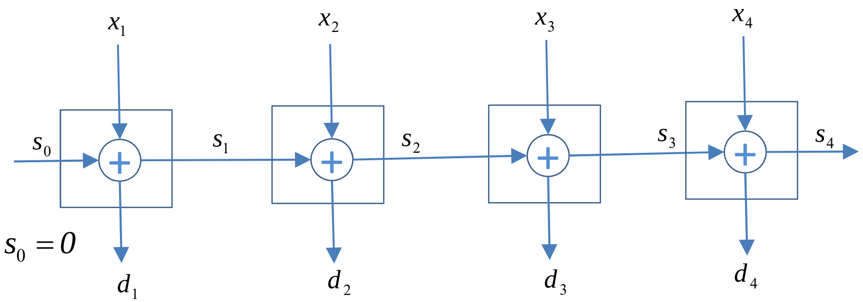
Restricciones de no negatividad de la variables de decisión

**Función de coste.**

$$Minimizar\quad z = \sum_{i=1}^{n} (c_t x_t + a_t s_t)$$

Suma de los costes de producción y almacenamiento durante todo el período

**Problema 7: producción multi-período**




| Meses | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Demanda | 30 | 50 | 100 | 190 |
| Coste producción | 20 | 30 | 40 | 50 |
| Coste almacenamiento | 5 | 6 | 7 | 8 |

## Solución

### Variables de decisión

$x_t =$ *producción en el mes t;* $\quad t = 1,2,3,4$

$s_t =$ *almacenamiento en el mes t;* $\quad t = 1,2,3,4$

### Restricciones

$$0 + x_1 = 30 + s_1$$
$$s_1 + x_1 = 50 + s_2$$
$$s_2 + x_1 = 100 + s_3$$
$$s_3 + x_1 = 190 + s_4$$
$$s_1 \leq 40$$
$$s_2 \leq 40$$
$$s_3 \leq 40$$
$$s_4 \leq 40$$

### Función objetivo

$$Minimizar \quad z = 20x_1 + 30x_2 + 40x_3 + 50x_4 + 5s_1 + 6s_2 + 7s_3 + 8s_4$$

**Problema 7: expresión OPL**

```
//Variables de decisión
dvar float+ x1;
dvar float+ x2;
dvar float+ x3;
dvar float+ x4;
dvar float+ s1;
dvar float+ s2;
dvar float+ s3;
dvar float+ s4;

//Función objetivo

minimize
20*x1+30*x2+40*x3+50*x4+5*s1+6*s2+7*s3+8*s;

//Restricciones
subject to
{
0+x1==30+s1;
s1+x2==50+s2;
s2+x3==100+s3;
s3+x4==190+s4;

s1<=40;
s2<=40;
s3<=40;
s4<=40;
}
```

```
// solution (optimal) with objective 15120
x1 = 70;
x2 = 50;
x3 = 100;
x4 = 150;
s1 = 40;
s2 = 40;
s3 = 40;
s4 = 0;
```

**Ejercicio**

Teniendo en cuenta que tan importante es formular un modelo de programación lineal como identificar problemas reales que puedan resolverse con este tipo de modelo, el ejercicio correspondiente a este tema constará de las siguientes fases:

1. Especificar un problema real que pueda resolverse con un modelo de programación lineal.

2. Obtener el modelo lineal correspondiente al problema especificado.

3. Expresar el modelo en OPL y ejecutarlo en el entorno de desarrollo.

4. Variar los datos de la especificación y observar el efecto que tiene sobre la solución.