Tema 4: Programación lineal con variables continuas: método del Simplex

Objetivos del tema:

- Resolver de forma gráfica un problema de programación lineal continuo
- Estudiar las formas equivalentes de representación de los problemas de programación lineal
- Aprender los conceptos básicos de álgebra lineal necesarios para resolver programas lineales continuos
- Resolver un problema de programación lineal continua por enumeración exhaustiva de soluciones básicas.
- Resolver un problema de programación lineal continua utilizando la versión algebraica del método del simplex
- Resolver un problema de programación lineal continua utilizando la versión tabular del método del simplex

Resolución de problemas de programación lineal

En este tema abordamos la forma de resolver problemas de programación lineal continua. El objetivo fundamental es entender la naturaleza del problema y el perfil computacional a que dan lugar estos métodos. Desde un punto de vista práctico los procedimientos manuales de resolución no tienen mucho interés porque hoy día existen abundantes herramientas informáticas que implementan de manera muy eficiente estos procedimientos y, como estudiamos en el tema anterior, permiten utilizarlos desde potentes lenguajes de modelado.

Aunque el tema se centra fundamentalmente en el algoritmo del Simplex, propuesto por Dantzig en 1947, comenzaremos introduciendo el método de resolución gráfico, que resulta muy intuitivo para entender la correspondencia entre la versión puramente algebraica de estos problemas y su representación geométrica.

A continuación estudiaremos una serie de transformaciones que nos van a permitir llevar los problemas de programación lineal a una forma estándar, que es el punto de partida del algoritmo del Simplex.

Después estudiaremos el concepto de solución básica factible, que juega un papel fundamental en la resolución de los problemas de programación lineal, ya que una solución óptima será siempre una solución básica factible y además porque el número de soluciones básicas factibles de un problema lineal continuo es finito, lo que acota considerablemente el procedimiento de búsqueda de la solución.

Antes de abordar de manera precisa el método del Simplex utilizaremos un ejemplo para introducir de manera más intuitiva los conceptos fundamentales que operan en este algoritmo.

A continuación estudiaremos los fundamentos teóricos del método y los criterios de operación que resumiremos en una versión algebraica del algoritmo del Simplex. Después lo aplicaremos a un ejemplo.

Después veremos la versión tabular de este algoritmo que simplifica su utilización manual y la aplicaremos al mismo ejemplo.

Finalmente introduciremos los métodos que se utilizan para obtener una solución básica factible inicial para el método del Simplex cuando hay que introducir variables artificiales en el problema original para llevarlo a su forma estándar.

Resolución gráfica

La resolución gráfica de los problemas de programación lineal no es muy práctica porque sólo se puede aplicar cuando el número de variables es de 2 o 3. Sin embargo es bastante útil para interpretar visualmente los conceptos y procedimientos utilizados posteriormente. Para resolver gráficamente un problema de programación lineal seguimos los siguientes pasos:

1) Dibujamos la región factible utilizando las ecuaciones de las rectas que resultan de convertir las restricciones en igualdades.
2) Determinamos los puntos extremos de la región factible: puntos de intersección entre las rectas y que pertenecen a la región factible.
3) Evaluamos la función objetivo en los puntos extremos y determinamos el de valor óptimo

Este mismo problema lo utilizaremos posteriormente para ilustrar los restantes métodos de resolución

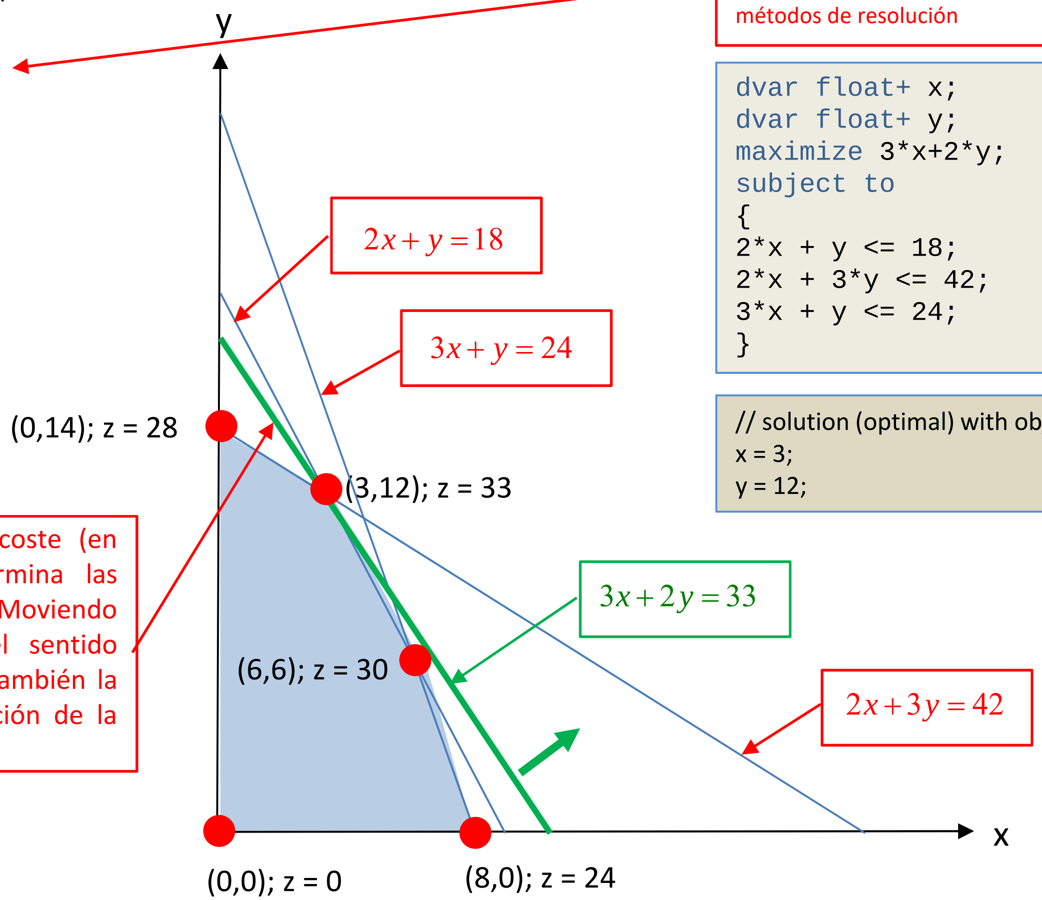
Vamos a resolver gráficamente el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\textit{Maximizar}\ \ z = 3x + 2y \\ &\textit{sujetoa}: \quad 2x + y \le 18 \\ &\qquad\qquad\quad 2x + 3y \le 42 \\ &\qquad\qquad\quad 3x + y \le 24 \\ &\qquad\qquad\quad x \ge 0, y \ge 0 \end{aligned}$$

OPL

```
dvar float+ x;
dvar float+ y;
maximize 3*x+2*y;
subject to
{
2*x + y <= 18;
2*x + 3*y <= 42;
3*x + y <= 24;
}
```

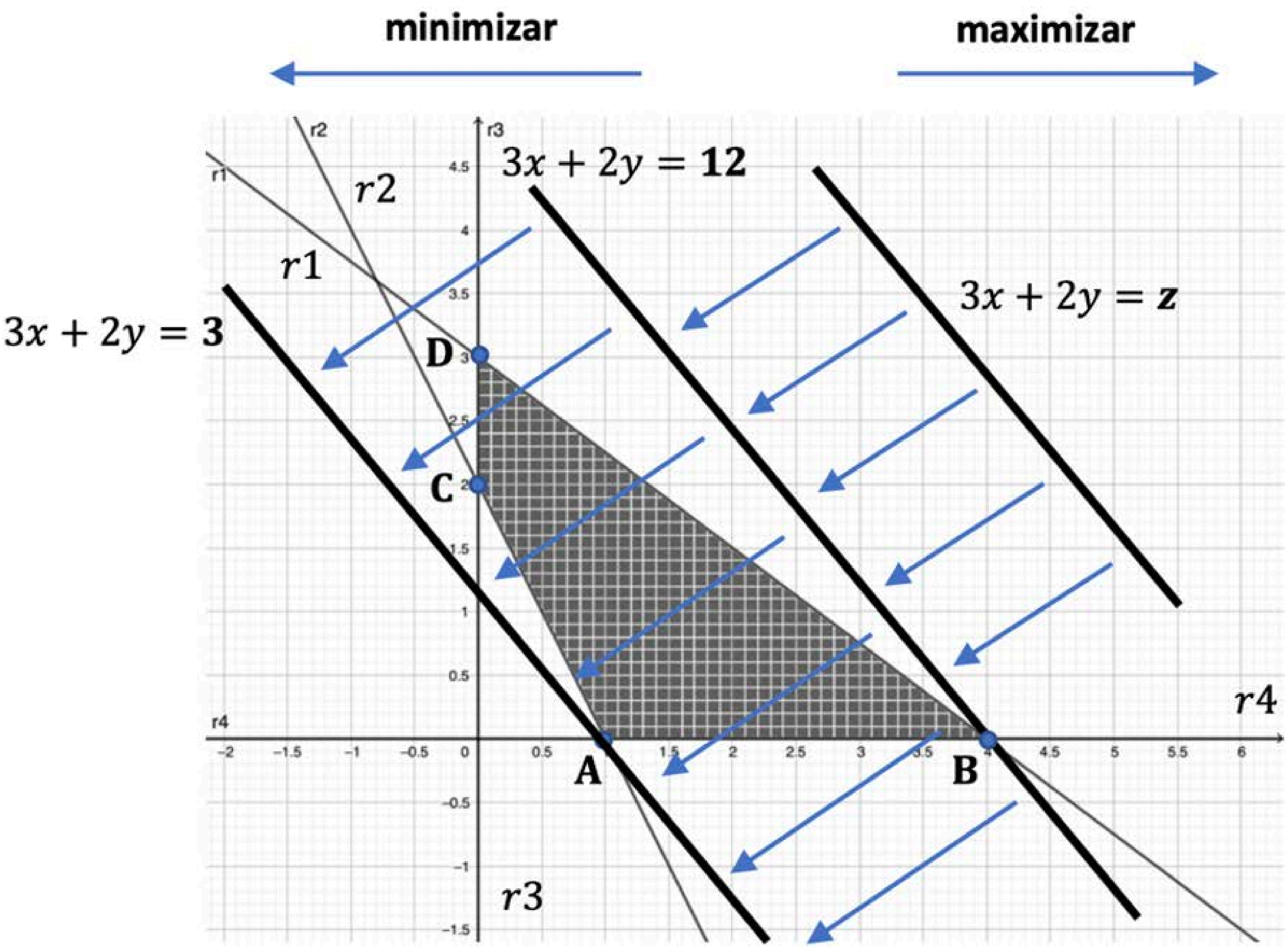
```
// solution (optimal) with objective 33
x = 3;
y = 12;
```



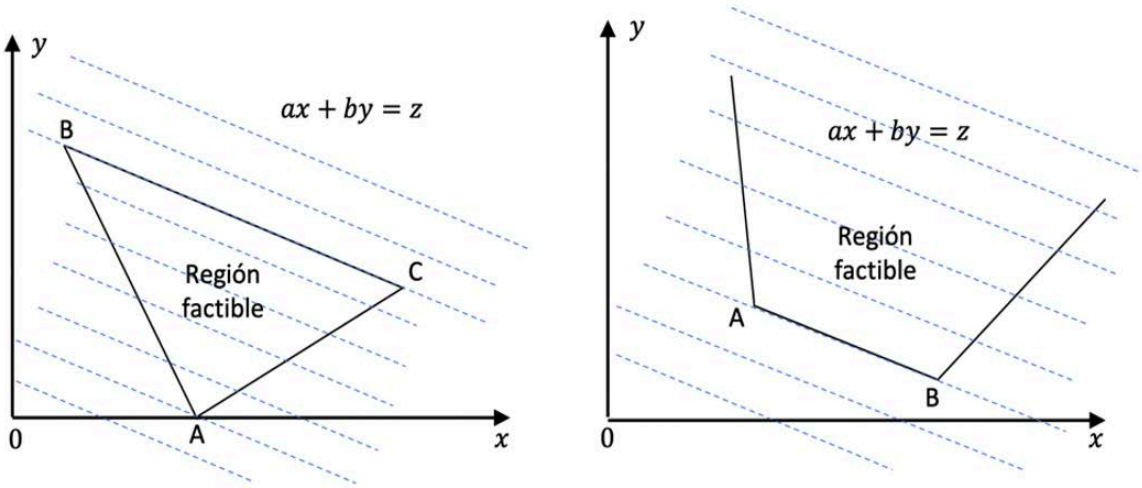
La intersección de la recta de iso-coste (en verde) con la región factible determina las soluciones factibles de igual coste. Moviendo esta recta de forma paralela en el sentido creciente de z, se puede determinar también la solución al problema: última intersección de la recta con los puntos extremos.

El **teorema fundamental de la programación lineal** asegura que, si un problema de programación lineal tiene *solución óptima finita*, entonces necesariamente existe un punto extremo de la región factible que se ha dibujado en el que se alcanza dicha solución óptima. Por ello, se obtendrá el valor de la función objetivo $z = z(x, y)$ en cada uno de los puntos extremos de la región factible, y se determinará en cuál o cuales de ellos se alcanza su *valor óptimo* (*máximo* o *mínimo*), si es que este existe y es finito. En los problemas de *maximización*, la solución óptima la daría el punto extremo de la región factible que tenga el mayor valor de la función objetivo, mientras que en los de *minimización*, la daría el punto extremo que proporcione el menor valor de la función objetivo. Por ejemplo, si la función objetivo es $z = z(x, y) = 3x + 2y$, el valor que toma en cada uno de los puntos extremos anteriores sería

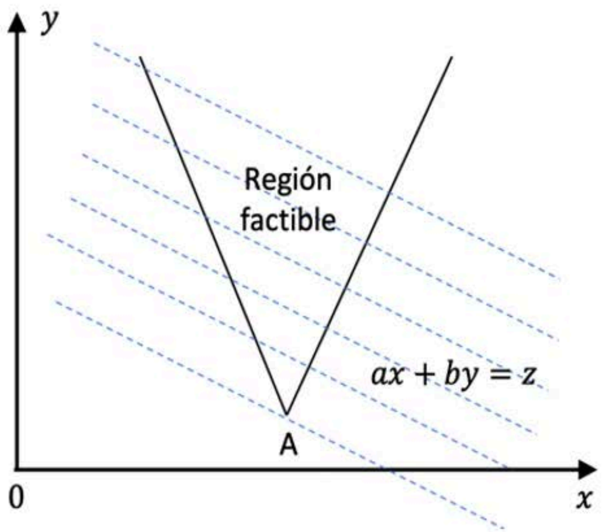
$$\mathbf{A(1,0)} \implies \boldsymbol{z(1,0) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 3}$$
$$\mathbf{B(4,0)} \implies \boldsymbol{z(4,0) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 12}$$
$$\mathrm{C}(0,2) \implies z(0,2) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4$$
$$\mathrm{D}(0,3) \implies z(0,3) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 6$$

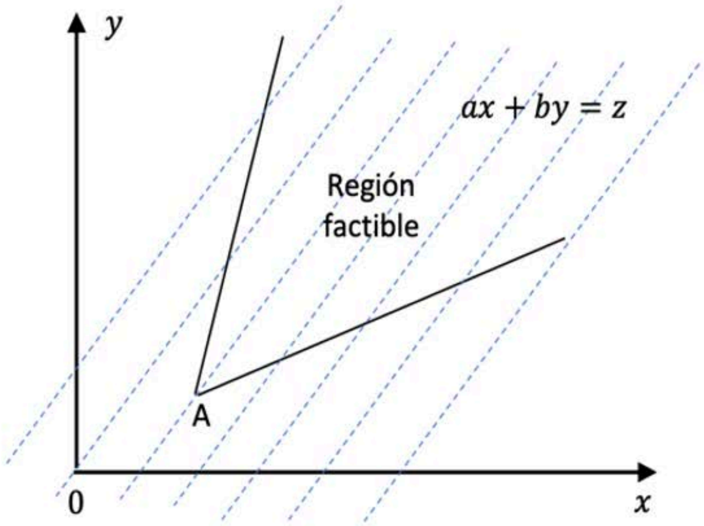

minimizar
maximizar
r2
r3
$3x + 2y = \mathbf{12}$
r1
$r2$
$r1$
$3x + 2y = \mathbf{z}$
$3x + 2y = \mathbf{3}$
D
C
$r4$
r4
A
B
$r3$

En general, pueden ocurrir los siguientes casos particulares, caracterizando cada uno de ellos la discusión de los diferentes tipos de soluciones que se pueden obtener al resolver un problema de programación lineal:



En el primer caso, el mínimo se tiene en el punto A, mientras que el máximo se tiene en cualquiera de los infinitos puntos del segmento $\overline{BC}$. En el segundo caso, la región factible no es acotada, por lo que no tiene máximo, y su mínimo se tendría en cualquiera de los infinitos puntos del segmento $\overline{AB}$.





En el tercer caso, el mínimo se tiene en el punto A, sin embargo, no existe máximo. En el cuarto y último caso, la región factible no tiene ni mínimo ni máximo.

Formas equivalentes de un problema de programación lineal

En el tema 1 vimos que la forma general de un problema de programación lineal continuo era la siguiente:

$$Maximizar\ \acute{o}\ Minimizar \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$
$$sujeta\ a:$$
$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le \acute{o} \ge \acute{o} = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le \acute{o} \ge \acute{o} = b_2 \\ &\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le \acute{o} \ge \acute{o} = b_1 \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \end{aligned}$$

Vamos a analizar una serie de transformaciones que convierten el problema en otro equivalente, entendiendo como equivalente otro problema que tiene las mismas valores para las variables de decisión y función objetivo.

Maximización y minimización

Es evidente que siempre se cumple la siguiente relación:

$$Máximo\ c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = -Mínimo - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n$$

Luego un problema de maximización siempre podemos convertirlo en uno de minimización equivalente y viceversa. Por tanto no se pierde generalidad si suponemos que siempre el problema es de maximización. Para trabajar con uno de minimización basta cambiar los signos de los coeficientes de la función de coste y resolver el problema de maximización resultante. El mínimo buscado será el opuesto del máximo obtenido.

Variables no restringidas

Como en la mayoría de los problemas las variables de decisión x_j representan cantidades físicas, su no negatividad aparece de forma natural. Sin embargo hay ocasiones en las que es necesario tratar con variables de decisión que puedan tomar valores positivos y negativos, por ejemplo, en problemas de flujo para especificar el sentido del mismo. Estas variables se denominan no restringidas. Si x_j es una variable no restringida siempre podemos sustituirla por la diferencia de dos variables no negativas, resultando un problema equivalente pero con más variables:

$$x_j = x_j' - x_j'' \quad con \quad x_j' \ge 0,\ x_j'' \ge 0$$

Cambio de igualdad a desigualdad

Una restricción de igualdad de la forma:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

podemos sustituirla por dos restricciones de desigualdad de la forma:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$$

y la segunda podemos sustituirla por otra del mismo sentido que la primera cambiando de signo ambos miembros:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$$
$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \leq -b_i$$

Cambio de desigualdad a igualdad: variables de holgura

Una restricción de desigualdad de la forma:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$$

podemos sustituirla por otra restricción de igualdad introduciendo una nueva variable no negativa denominada de holgura:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i \quad con \quad x_{n+1} \geq 0$$

Análogamente, una restricción de desigualdad de la forma:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$$

podemos sustituirla por otra restricción de igualdad introduciendo una nueva variable de holgura:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i \quad con \quad x_{n+1} \geq 0$$

Forma canónica de un problema de programación lineal

Teniendo en cuenta las transformaciones anteriores, un problema lineal siempre podemos transformarlo en uno equivalente de maximización con todas las restricciones de tipo $\leq$ denominado forma canónica:

$$
\begin{aligned}
&\textit{Maximizar} \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
&\textit{sujeta a}: \\
&\qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
&\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
&\qquad \ldots \\
&\qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_1 \qquad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

Forma estándar de un problema de programación lineal

De la misma manera un problema de programación lineal siempre podemos transformarlo en su equivalente en forma estándar en el que sólo existen restricciones de igualdad:

$$
\begin{aligned}
&\textit{Maximizar} \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
&\textit{sujeta a}: \\
&\qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\qquad \ldots \\
&\qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \qquad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

En forma matricial la forma estándar de un problema de programación lineal adoptaría la forma general:

$$
\begin{aligned}
&\textit{Maximizar} \quad z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\
&\textit{sujeto a} \quad \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \\
&\qquad\qquad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
\qquad
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix};
\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix};
\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix};
\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \ldots \\ c_n \end{bmatrix};
\qquad
\boldsymbol{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \ldots \\ a_{mj} \end{bmatrix};
\boldsymbol{A} = \left[\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_j \ldots \boldsymbol{a}_n\right]
$$

Es evidente que aunque hayamos utilizado la misma notación para la matriz $\boldsymbol{A}$ y los vectores $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{x}$ en las dos formas canónica y estándar, cuando un mismo problema se lleva a ambas formas se obtienen en general matrices y vectores diferentes.

Ejemplo de paso a la forma estándar

Vamos a transformar el siguiente problema de programación lineal en otro equivalente que está en la forma normal.

$$\begin{aligned} &Maximizar\ \ z = 3x + 2y \\ &sujeto a: \quad 2x + y \le 18 \\ &\qquad\qquad 2x + 3y \le 42 \\ &\qquad\qquad 3x + y \le 24 \\ &\qquad\qquad x \ge 0, y \ge 0 \end{aligned}$$

Para ello introducimos las tres variables de holgura $h, s, d \ge 0$ que convierten las desigualdades en igualdades:

$$\begin{aligned} &Maximizar\ \ z = 3x + 2y \\ &sujeto a: \quad 2x + y + h = 18 \\ &\qquad\qquad 2x + 3y + s = 42 \\ &\qquad\qquad 3x + y + d = 24 \\ &\qquad\qquad x, y, h, s, d \ge 0 \end{aligned}$$

En forma matricial sería:

$$Maximizar\ \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ h \\ s \\ d \end{bmatrix} \quad sujeto\ a: \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ h \\ s \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 42 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Conceptos básicos de programación lineal

Dado el siguiente problema de programación lineal continua en la forma estándar:

$$\begin{aligned} &\mathit{Maximizar} \quad z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ &\mathit{sujeto\ a} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ &\qquad\qquad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}; \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{bmatrix}; \boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_j \dots \boldsymbol{a}_n]$$

definimos los siguientes términos:

- **Solución factible:** valores de $\boldsymbol{x}$ que satisfacen todas las restricciones, incluidas las de no negatividad
- **Solución factible óptima:** la solución factible que proporciona el óptimo para la función objetivo
- **Base o matriz básica**: una matriz cuadrada $\boldsymbol{B}$ de dimensión y rango *m* extraída de las columnas de $\boldsymbol{A}$
- **Matriz no básica**: matriz residual $\boldsymbol{N}$ formada por las columnas de $\boldsymbol{A}$ que no están en $\boldsymbol{B}$
- **Variables básicas**: las *m* variables $\boldsymbol{x}_B$ de $\boldsymbol{x}$ asociadas a las columnas de $\boldsymbol{B}$
- **Variables no básicas**: las *n-m* restantes variables $\boldsymbol{x}_N$ de $\boldsymbol{x}$
- **Solución básica**

Si expresamos la matriz $\boldsymbol{A}$ y el vector $\boldsymbol{x}$ descompuestos en variables básicas y no básicas tenemos:

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{N}]; \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ se puede escribir como: } [\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{N}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \quad o\ bien: \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b}$$

si hacemos $\boldsymbol{x}_N = 0$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ se convierte en $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{b}$ cuya solución es $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ que es la solución básica de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ asociada a $\boldsymbol{B}$

Una solución básica será , pues, una solución del problema lineal en la que *n-m* variables de decisión toman valor cero.

- **Solución básica factible:** una solución básica que además es factible, es decir $\boldsymbol{x}_B \geq 0$
- **Función de coste de una solución básica factible** $z_B = [\boldsymbol{c}_B\ \boldsymbol{c}_N] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{x}_B$

Correspondencia: puntos extremos <----> soluciones básicas factibles

Las soluciones básicas factibles de un problema lineal estándar se corresponden con los puntos extremos de la región factible:

$$\boldsymbol{x}_{B_1} = \boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{x}_{B_2} = \boldsymbol{B}_2^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$$

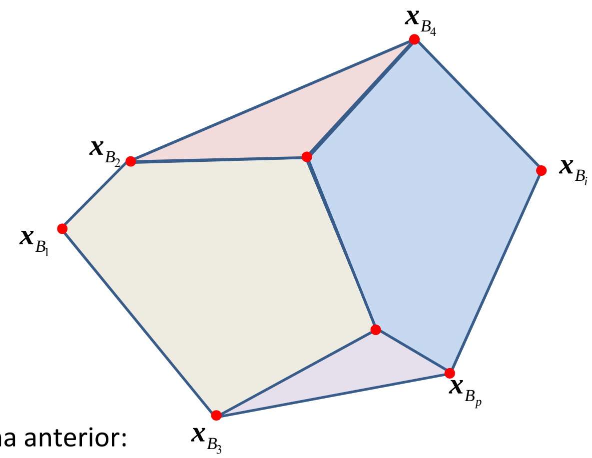
....

$$\boldsymbol{x}_{B_i} = \boldsymbol{B}_i^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$$

....

$$\boldsymbol{x}_{B_p} = \boldsymbol{B}_p^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$$

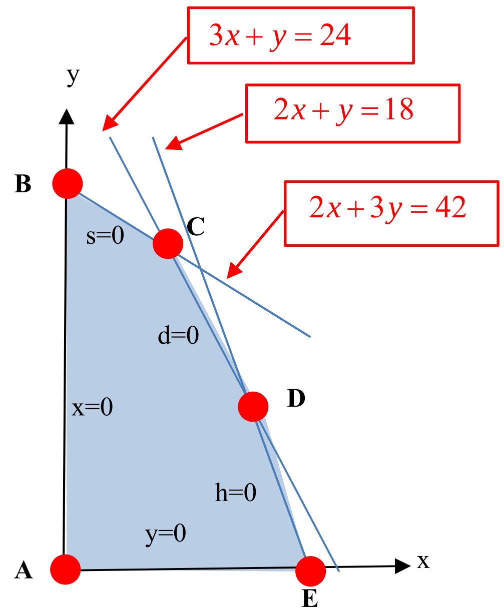
$\boldsymbol{B}_i$ *son p bases factibles*



Para entender más intuitivamente esta correspondencia consideremos el problema anterior:

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximizar } z = 3x + 2y \\
&\text{sujeto a}: \quad 2x + y + h = 18 \\
&\qquad\qquad\quad 2x + 3y + s = 42 \\
&\qquad\qquad\quad 3x + y + d = 24 \\
&\qquad\qquad\quad x \geq 0, y \geq 0
\end{aligned}
$$

Puntos extremos	Variables nulas	Variables no nulas
A	x, y	s, h, d
B	x, s	y, h, d
C	s, d	x, y, h
D	d, h	x, y, s
E	y, h	x, s, d



- Cada punto de la región factible ABCDE viene identificado por una tupla de valores para *x,y,h,s,d*
- Los valores de las variables *x* e *y* dan las coordenadas del punto en el plano *(x,y)*
- Los valores de las variables *h,s,d* dan la separación del punto (*x,y*) a la recta definida por la restricción correspondiente.
- Los puntos situados sobre las aristas del polígono que forma la región factible tienen una componente nula.
- Los puntos extremos del polígono (vértices) que están sobre dos restricciones (intersección de dos rectas) tendrán dos variables nulas y por tanto serán soluciones básicas factibles.

Ejemplo de correspondencia: puntos extremos <----> soluciones básicas factibles

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ z = x_1 + x_2 + x_3\\
&s.a.\\
&\qquad x_1 \le 5\\
&\qquad x_2 \le 5\\
&\qquad x_3 \le 5\\
&\qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
\quad \xrightarrow{\text{Forma estándar}} \quad
\begin{aligned}
&Max\ \ z = x_1 + x_2 + x_3\\
&s.a.\\
&\qquad x_1 + \qquad\qquad s_1 \qquad = 5\\
&\qquad\qquad x_2 + \qquad\qquad s_2 \quad = 5\\
&\qquad\qquad\qquad x_3 + \qquad\quad s_3 = 5
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\quad
\boldsymbol{x}^T = [x_1 \ \ x_2 \ \ x_3 \ \ s_1 \ \ s_2 \ \ s_3];\quad
\boldsymbol{c}^T = [1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0];\quad
\boldsymbol{b}^T = [5 \ \ 5 \ \ 5];
$$

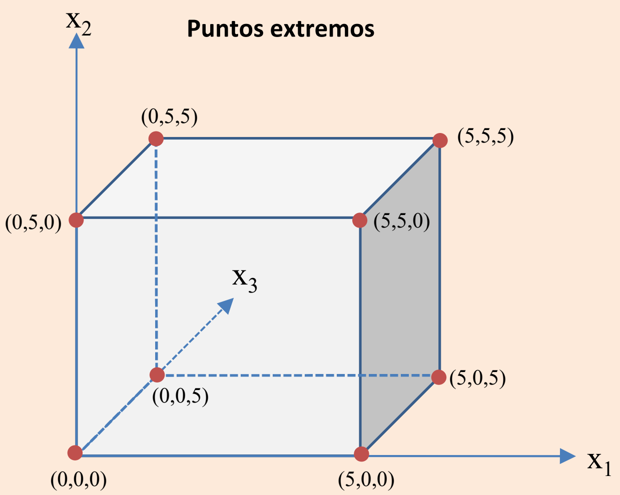
$$
N^{o}\ máximo\ de\ soluciones\ básicas = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{6!}{3!3!} = 20
$$

$\text{sólo 8 tienen inversa y son factibles:}$

$$
base = (x_1\ x_2\ x_3) \qquad \boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}
$$

Todas las sub-matrices $\boldsymbol{B}_i$ de $\boldsymbol{A}$ de orden 3 son singulares salvo las 8 correspondientes a las siguientes variables básicas:

Puntos extremos



Soluciones básicas factibles

$básicas$	$no\ básicas$	$(x_1^*\ x_2^*\ x_3^*)$
$(x_1\ \ x_2\ \ x_3)$	$(s_1\ \ s_2\ \ s_3)$	$(5\ \ 5\ \ 5)$
$(x_1\ \ x_2\ \ s_3)$	$(s_1\ \ s_2\ \ x_3)$	$(5\ \ 5\ \ 0)$
$(x_1\ \ s_2\ \ x_3)$	$(s_1\ \ x_2\ \ s_3)$	$(5\ \ 0\ \ 5)$
$(x_1\ \ s_2\ \ s_3)$	$(s_1\ \ x_2\ \ x_3)$	$(5\ \ 0\ \ 0)$
$(s_1\ \ x_2\ \ x_3)$	$(x_1\ \ s_2\ \ s_3)$	$(0\ \ 5\ \ 5)$
$(s_1\ \ x_2\ \ s_3)$	$(x_1\ \ s_2\ \ x_3)$	$(0\ \ 5\ \ 0)$
$(s_1\ \ s_2\ \ x_3)$	$(x_1\ \ x_2\ \ s_3)$	$(0\ \ 0\ \ 5)$
$(s_1\ \ s_2\ \ s_3)$	$(x_1\ \ x_2\ \ x_3)$	$(0\ \ 0\ \ 0)$

Búsqueda exhaustiva de soluciones básicas

El teorema fundamental de la programación lineal asegura que si un problema de programación lineal tiene solución óptima finita, entonces necesariamente existe un punto extremo de la región factible en el que alcanza dicha solución óptima. Por tanto este resultado resuelve teóricamente el problema de la programación lineal, puesto que la solución se puede encontrar examinando el valor de la función objetivo en un número finito de puntos.

Vamos a utilizar este resultado para obtener el punto extremo óptimo del anterior problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} &Maximizar\ z = 3x + 2y + 0h + 0s + 0d \\ &sujeto\ a: \quad 2x + y + h = 18 \\ &\qquad 2x + 3y + s = 42 \\ &\qquad 3x + y + d = 24 \\ &\qquad x, y, h, s, d \geq 0 \end{aligned}$$

$$Maximizar \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ h \\ s \\ d \end{bmatrix} \quad sujeto\ a: \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ h \\ s \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 42 \\ 24 \end{bmatrix}$$

La matriz de este problema admite 10 sub-matrices cuadradas de 3X3 candidatas a puntos extremos de la región factible:

$$A = \begin{array}{c} (x \quad y \quad h \quad s \quad d) \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 2} = 10$$

Estas sub-matrices son las siguientes:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Enumeración de las soluciones básicas factibles

Vamos a calcular cada una de las soluciones básicas factibles y el valor correspondiente de la función objetivo: $x_B = B^{-1}b_B; \quad z_B = c_B^T x_B$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}; B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.14 & 0.43 \\ 0 & 0.43 & -0.29 \\ 0.33 & -0.05 & -0.19 \end{bmatrix}; \quad x_B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.29 \\ 11.14 \\ -0.57 \end{bmatrix}$$

no factible porque h es negativa

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}; B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -7 & 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad x_B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

factible: $z_B = 30, \; x = 6, \; y = 6$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}; B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.25 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ -1.75 & 0.25 & 1 \end{bmatrix}; \quad x_B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix}$$

factible: $z_B = 33, \; x = 3, \; y = 12$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 1 & 0 & -0.67 \\ 0 & 1 & -0.67 \end{bmatrix}; \quad x_B = \begin{bmatrix} x \\ h \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 26 \end{bmatrix}$$

factible: $z_B = 24, \; x = 8, \; y = 0$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}; B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1.5 & 1 \end{bmatrix}; \quad x_B = \begin{bmatrix} x \\ h \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ -24 \\ -39 \end{bmatrix}$$

no factible porque h y d son negativos

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}; B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad x_B = \begin{bmatrix} x \\ s \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 24 \\ -3 \end{bmatrix}$$

no factible porque d es negativo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}; \quad x_B = \begin{bmatrix} y \\ h \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ -6 \\ -30 \end{bmatrix}$$

no factible porque h y s son negativos

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0.333 & 0 \\ 1 & -0.333 & 0 \\ 0 & -0.333 & 1 \end{bmatrix}; \quad x_B = \begin{bmatrix} y \\ h \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

factible: $z_B = 28, \; x = 0, \; y = 14$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad x_B = \begin{bmatrix} y \\ s \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

no factible porque s es negativo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad x_B = \begin{bmatrix} h \\ s \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 42 \\ 24 \end{bmatrix}$$

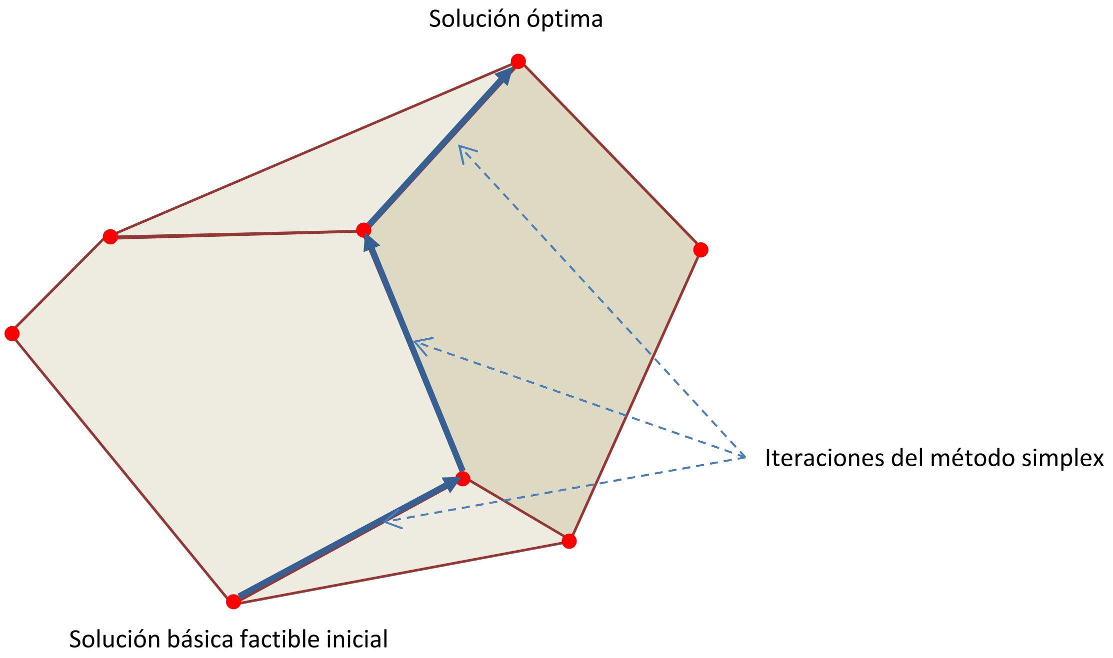
factible: $z_B = 0, \; x = 0, \; y = 0$

Sólo 5 son básicas factibles, y la que produce valor máximo a la función de coste es: $z_B = 33, \quad x = 3, \quad y = 12$

Método del Simplex

Hemos visto que el teorema fundamental de la programación lineal permite resolver estos problemas examinando el valor de la función objetivo en un número finito de puntos. Sin embargo, el número de puntos extremos de un problema puede ser muy elevado por lo que se hace necesaria alguna estrategia que examine los puntos extremos de una manera eficiente, es decir, que recorra a ser posible en primer lugar los más prometedores como candidatos a óptimos, y que disponga de un criterio que determine que se ha alcanzado la solución óptima sin haber realizado un recorrido completo de todos puntos extremos.

El método del simplex reúne estas características ya que parte de un punto extremo inicial cualquiera(solución básica factible) y mediante unos criterios muy precisos opera de forma iterativa pasando de un punto extremo a otro adyacente (sólo se diferencia en una variable que en uno es básica y el otro no) que mejora (o por lo menos no empeora) la función objetivo de procedencia, alcanzado la solución óptima en un número finito de pasos.



Es evidente que cuanto mejor sea la solución básica de partida más eficiente resultará el método, llegándose antes a la solución óptima.

Introducción al método del simplex

Vamos a introducir el método del simplex de una manera intuitiva utilizando el ejemplo anterior en forma estándar:

$$
\begin{aligned}
&\mathit{Maximizar}\ \ z = 3x + 2y \\
&\mathit{sujeto\ a:}\ \ 2x + y + h \qquad\quad = 18 \\
&\qquad\qquad\quad\ 2x + 3y + \ s \quad\ = 42 \\
&\qquad\qquad\quad\ 3x + y + \qquad d = 24 \qquad x, y, h, s, d \geq 0
\end{aligned}
$$

Expresión matricial:

$$
\begin{aligned}
&\mathit{Maximizar}\ \ z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
&\mathit{sujeto\ a}\qquad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\qquad\qquad\quad\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\mathbf{c}^T &= [3 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\
\mathbf{x}^T &= [x \quad y \quad h \quad s \quad d] \\
\mathbf{b}^T &= [18 \quad 42 \quad 24]
\end{aligned}
\qquad
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

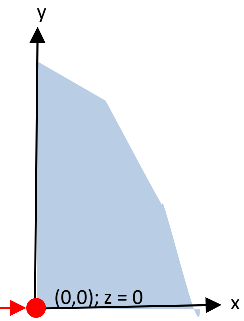
Partiremos de una base inicial e iremos pasando en sucesivas iteraciones por bases de mejor coste hasta alcanzar el óptimo

0) Elección de una base inicial

El algoritmo del simplex parte de una solución básica factible inicial correspondiente a un punto extremo de la región factible. En nuestro caso, y aprovechando las variables de holgura introducidas, resulta fácil obtener una solución básica haciendo $x=0$ e $y=0$ y resolviendo el sistema resultante en h, s y d:

$$
\begin{cases} \boxed{\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}} \\ h = 18 \\ s = 42 \\ d = 24 \\ \boxed{z = 0} \end{cases}
$$

que corresponde a la base: $\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



Podemos reescribir el sistema de ecuaciones despejando las variables básicas:

$$
\begin{cases} h = 18 - 2x - y \\ s = 42 - 2x - 3y \\ d = 24 - 3x - y \\ z = 0 + 3x + 2y \end{cases}
$$

Se observa que es posible mejorar z introduciendo x o y en la base y sacando h, s o d. Introduciremos x que aporta más que y a z (3 frente a 2).

1) Primera iteración

Introducir x en la base significa que aumentamos su valor de cero a un valor positivo. Es evidente que cuanto mayor sea este valor mayor aportación hará x a z. Sin embargo, el valor de x no debe salir de la región factible, lo que significa que debe respetar las restricciones, incluidas las de no negatividad. Puesto que y va a seguir fuera de la base seguirá valiendo $y = 0$ y tendremos:

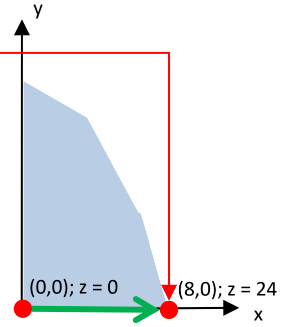
d es la variable que determina el máximo valor que puede aportar x a la función objetivo, 8

$$\begin{matrix} h = 18 - 2x & h \geq 0 & & 0 \leq h = 18 - 2x & & x \leq \frac{18}{2} \\ s = 42 - 2x & s \geq 0 & \Rightarrow & 0 \leq s = 42 - 2x & \Rightarrow & x \leq \frac{42}{2} \\ d = 24 - 3x & d \geq 0 & & \boxed{0 \leq d = 24 - 3x} & & x \leq \frac{24}{3} \end{matrix} \Rightarrow x \leq Min\left\{\frac{18}{2}, \frac{42}{2}, \frac{24}{3}\right\} = Min\{9, 21, 8\} = 8$$

Cuando $x = 8 \Rightarrow d = 0 \Rightarrow d$ deja la base. Por tanto hemos sacado a d de la base y hemos introducido a x. Los nuevos valores de las variables serán:

$$\begin{aligned} h &= 18 - 2\times 8 = 2 \\ s &= 42 - 2\times 8 = 26 \\ d &= 24 - 3\times 8 = 0 \\ z &= 3x + 2y = 3\times 8 = 24 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 8 \\ y &= 0 \end{aligned}} \quad h = 2, \quad s = 26, \quad d = 0, \quad \boxed{z = 24}$$



Despejemos en el sistema las variables básicas:

$$\begin{cases} h = 18 - 2x - y \\ s = 42 - 2x - 3y \\ d = 24 - 3x - y \\ z = 0 + 3x + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 18 - 2\times \frac{1}{3}(24 - y - d) - y \\ s = 42 - 2\times \frac{1}{3}(24 - y - d) - 3y \\ x = \frac{1}{3}(24 - y - d) \\ z = (24 - y - d) + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 2 - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}d \\ s = 26 - \frac{7}{3}y + \frac{2}{3}d \\ x = 8 - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}d \\ z = 24 + y - d \end{cases}$$

Se observa que es posible mejorar z introduciendo y en la base y sacando a h o s.

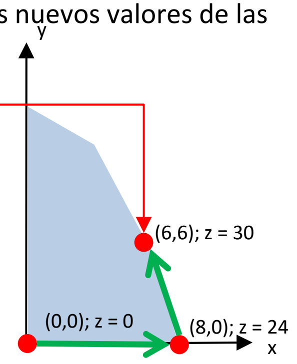
2) Segunda iteración

Introducir y en la base significa que aumentamos su valor de cero a un valor positivo. Es evidente que cuanto mayor sea este valor mayor aportación hará y a z. Sin embargo, el valor de y no debe salir de la región factible, lo que significa que debe respetar las restricciones, incluidas las de no negatividad. Puesto que d va a seguir fuera de la base seguirá valiendo $d = 0$ y tendremos:

$$
\begin{array}{l} h = 2 - \frac{1}{3}y \\ s = 26 - \frac{7}{3}y \\ x = 8 - \frac{1}{3}y \end{array}
\quad
\begin{array}{l} h \geq 0 \\ s \geq 0 \\ x \geq 0 \end{array}
\;\Rightarrow\;
\begin{array}{l} 0 \leq h = 2 - \frac{1}{3}y \\ 0 \leq s = 26 - \frac{7}{3}y \\ 0 \leq x = 8 - \frac{1}{3}y \end{array}
\;\Rightarrow\;
\begin{array}{l} y \leq 6 \\ y \leq 11,4 \\ y \leq 24 \end{array}
\;\Rightarrow\; y \leq Min\{6, 11,4, 24\} = 6
$$

Cuando $y = 6 \Rightarrow h = 0 \Rightarrow h$ deja la base. Por tanto hemos sacado a h de la base y hemos introducido a y. Los nuevos valores de las variables serán:

$$
\begin{array}{l} h = 2 - \frac{1}{3} \times 6 = 0 \\ s = 26 - \frac{7}{3} \times 6 = 12 \\ x = 8 - \frac{1}{3} \times 6 = 6 \\ z = 3x + 2y = 3 \times 6 + 2 \times 6 = 30 \end{array}
\qquad
\begin{array}{l} \boxed{\begin{array}{l} x = 6 \\ y = 6 \end{array}} \\ h = 0 \\ s = 12 \\ d = 0 \\ \boxed{z = 30} \end{array}
$$



Despejemos en el sistema las variables básicas:

$$
\begin{cases} h = 2 - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}d \\ s = 26 - \frac{7}{3}y + \frac{2}{3}d \\ x = 8 - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}d \\ z = 24 + y - d \end{cases}
\qquad
\begin{cases} y = 6 - 3h + 2d \\ s = 12 + 7h - 4d \\ x = 6 + h - d \\ z = 30 - 3h + d \end{cases}
$$

Se observa que es posible mejorar z introduciendo d en la base.

3) Tercera iteración

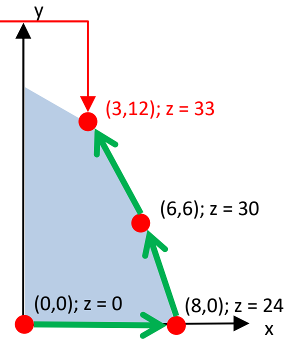
Introducir d en la base significa que aumentamos su valor de cero a un valor positivo. Es evidente que cuanto mayor sea este valor mayor aportación hará d a z. Sin embargo, el valor de d no debe salir de la región factible, lo que significa que debe respetar las restricciones, incluidas las de no negatividad. Puesto que h va a seguir fuera de la base seguirá valiendo $h = 0$ y tendremos:

$$\begin{matrix} y = 6 + 2d \\ s = 12 - 4d \\ x = 6 - d \end{matrix} \qquad \begin{matrix} y \geq 0 \\ s \geq 0 \\ x \geq 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 0 \leq y = 6 + 2d \\ 0 \leq s = 12 - 4d \\ 0 \leq x = 6 - d \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} d \leq -3 \\ d \leq 3 \\ d \leq 6 \end{matrix} \quad \Rightarrow \qquad d \leq Min\{3,6\} = 3$$

Cuando $d = 3 \Rightarrow s = 0 \Rightarrow s$ deja la base. Por tanto hemos sacado a s de la base y hemos introducido a d. Los nuevos valores de las variables serán:

$$\begin{matrix} y = 6 + 2 \times 3 = 12 \\ s = 12 - 12 = 0 \\ x = 6 - 3 = 3 \\ z = 3x + 2y = 3 \times 3 + 2 \times 12 = 33 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} x = 3 \\ y = 12 \end{matrix}} \\ h = 0 \\ s = 0 \\ d = 0 \\ \boxed{z = 33} \end{matrix}$$



Despejemos en el sistema las variables básicas:

$$\begin{cases} y = 6 - 3h + 2d \\ s = 12 + 7h - 4d \\ x = 6 + h - d \\ z = 30 - 3h + d \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \\ d = 3 + \tfrac{7}{4}h - \tfrac{1}{4}s \\ x = \\ z = 33 - \tfrac{5}{4}h - \tfrac{1}{4}s \end{cases}$$

Ya no es posible mejorar z puesto que los coeficientes de las variables no básicas son todos negativos. Luego hemos alcanzado el óptimo

Fundamentos del método del simplex

Los términos $(z_j - c_j)$ son los ***costes reducidos***. Determinan la aportación de las variables no básicas a la función objetivo

$$\begin{aligned} &\textit{Maximizar} \quad z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ &\textit{sujeto a} \quad \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \\ &\qquad\qquad\quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}; \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix}; \boldsymbol{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{bmatrix}; \boldsymbol{A} = \left[\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_j \dots \boldsymbol{a}_n\right]$$

Sea $\boldsymbol{B} = \left[\boldsymbol{a}_{j1} \dots \boldsymbol{a}_{j2} \dots \boldsymbol{a}_{jm}\right]$ una submatriz de $\boldsymbol{A}$ formada por m columnas de $\boldsymbol{A}$ y de rango m

Sean : $I = \{j_1, j_2, \dots, j_m\} =$ conjunto de índices de las columnas de $\boldsymbol{B}$

$J = \{1, 2, \dots, n\} - I =$ conjunto de índices de las columnas de $\boldsymbol{A}$ que no están en $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{N}]; \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \text{ se puede escribir: } [\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{N}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}, \quad \text{o bien} : \boldsymbol{Bx}_B + \boldsymbol{Nx}_N = \boldsymbol{b} \qquad (1)$$

si hacemos $\boldsymbol{x}_N = 0$, $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ se convierte en $\boldsymbol{Bx}_B = \boldsymbol{b}$ cuya solución es : $\overline{\boldsymbol{x}}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

Supongamos que $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \geq 0$ *de manera que* $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ 0 \end{bmatrix}$ *es una solución básica factible*

$$\overline{z}_B = [\boldsymbol{c}_B\ \boldsymbol{c}_N] \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{x}}_B \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{c}_B \overline{\boldsymbol{x}}_B + \boldsymbol{c}_N 0 = \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

Expresión del sistema de restricciones con respecto a las variables no básicas (sistema explícito)

$$\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

llamando $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ tenemos $\boxed{\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{Y}\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{x}}_B}$

A partir del sistema explicito se extraen las conclusiones teóricas necesarias para encontrar los criterios del algoritmo del simplex

y multiplicando por $\boldsymbol{c}_B$ la ecuacion anterior tenemos $\boldsymbol{c}_B \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{Y} \boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{c}_B\ \overline{\boldsymbol{x}}_B$

restando $z = \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N \boldsymbol{x}_N$ de la ecuación anterior

$$\boldsymbol{c}_N \boldsymbol{x}_N - \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{Y} \boldsymbol{x}_N = z - \boldsymbol{c}_B\ \overline{\boldsymbol{x}}_B = z - \overline{z}$$

$$(\boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{Y})\boldsymbol{x}_N = z - \overline{z} \Rightarrow z = \overline{z} + (\boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{Y})\boldsymbol{x}_N$$

$$\boxed{z = \overline{z} + \sum_{j \in J} (z_j - c_j) x_j;} \text{ donde } \quad \boldsymbol{Y} = [\boldsymbol{y}_j]_{j \in J} = [y_{sj}]_{s \in I, j \in J}$$

Expresión de la función objetivo con respecto a las variables no básicas (sistema explícito)

Criterios del método del simplex

Criterio de óptimo

La condición necesaria y suficiente para que una solución básica factible asociada a una base B sea óptima es:

$$\forall j \in J \quad (z_j - c_j) \geq 0$$

Criterio de entrada

$$\text{Se introduce la variable } x_k \text{ tal que } |z_k - c_k| = Máximo\left\{|z_j - c_j|; (z_j - c_j) < 0\right\}$$

Criterio de salida

$$\text{Si } x_k \text{ es la variable de entrada la de salida será la } x_l \text{ que cumpla } \frac{\overline{x}_l}{y_{lk}} = Mínimo\left\{\frac{\overline{x}_s}{y_{sk}}; y_{sk} > 0 \mid s \in I\right\}$$

Criterio de no acotación

$$\exists k \in J \mid (z_j - c_j) < 0 \quad con \quad y_k < 0$$

Método del Simplex algebraico

Supondremos que se trata de un problema que se encuentra en su forma estándar. En caso contrario se introducen las variables necesarias para llevarlo a la forma estándar.

$$\begin{aligned} &\textit{Maximizar} && z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ &\textit{sujeto a} && \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & && \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}; \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{bmatrix}; \boldsymbol{A} = \left[\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_j \dots \boldsymbol{a}_n \right]$$

1) El proceso comienza a partir de una base factible conocida de $\boldsymbol{A}$. Sea:

$$\boldsymbol{B} = \textit{submatriz no singular de } \boldsymbol{A} \textit{ de dimensión } m \times m \,(\textit{una base factible } \boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0})$$
$$I = \textit{conjunto de índices de } \boldsymbol{B};\ J = \{1, 2, \dots, n\} - I = \textit{conjunto de índices de } \boldsymbol{A} \textit{ que no estan en } \boldsymbol{B}$$

2) Calculamos:

$$\boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_j;\ j \in J$$
$$z_j = \boldsymbol{c}_B^T \boldsymbol{y}_j$$
$$(z_j - c_j)$$

3)

$$\textit{Si } (z_j - c_j) \geq 0 \ \ \forall j \in J \Rightarrow \boldsymbol{x}_B \textit{ es una solución básica } \textbf{\textit{óptima}} \textit{ con } z = \boldsymbol{c}_B^t \boldsymbol{x}_B \ \textbf{FIN}$$

$$\textit{Si } \exists j \in J : (z_j - c_j) < 0 \ \textit{ entonces definimos } J_1 = \left\{ j \in J \mid (z_j - c_j) < 0 \right\}$$

$$\textit{Si } \exists j \in J_1 \mid \boldsymbol{y}_j \leq \boldsymbol{0} \Rightarrow \textit{solución } \textbf{\textit{no acotada}} \ \textbf{FIN}$$

$$\textit{Si } \exists j \in J_1 \mid \boldsymbol{y}_j > \boldsymbol{0} \ \textit{ entonces calculamos } k \textit{ y } l$$

$$\textit{Cálculo de } k : \textit{criterio de entrada}: \ Max\{|z_j - c_j|;\ j \in J_1\} = |z_k - c_k|$$

$$\textit{Cálculo de } l : \textit{criterio de salida}: \ Min\left\{ \frac{x_s}{y_{sk}};\ y_{sk} > 0;\ s \in I \right\} = \frac{x_l}{y_{lk}}$$

$$\textit{Calculamos la nueva base } \boldsymbol{B}' \textit{ sustituyendo la columna } l \textit{ por la columna } k$$

$$\textit{Se repite el proceso con la nueva base } \boldsymbol{B}'$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} &Maximizar \quad z = 3x + 2y \\ &sujeto\ a: \quad 2x + y \le 18 \\ &\qquad\qquad 2x + 3y \le 42 \\ &\qquad\qquad 3x + y \le 24 \\ &\qquad\qquad x \ge 0, y \ge 0 \end{aligned}$$

$\xrightarrow{\text{forma estándar}}$

$$\begin{aligned} &Maximizar \quad z = 3x + 2y \\ &sujeto\ a: \quad 2x + y + h = 18 \\ &\qquad\qquad 2x + 3y + s = 42 \\ &\qquad\qquad 3x + y + d = 24 \\ &\qquad\qquad x \ge 0, y \ge 0 \end{aligned}$$

$$Maximizar \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ h \\ s \\ d \end{bmatrix} \qquad sujeto\ a: \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ h \\ s \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 42 \\ 24 \end{bmatrix}$$

```
dvar float+ x;
dvar float+ y;
maximize 3*x+2*y;
subject to
{
2*x + y <= 18;
2*x + 3*y <= 42;
3*x + y <= 24;
}
```

OPL

```
// solution (optimal) with objective 33
x = 3;
y = 12;
```

$$\begin{array}{c} \quad (\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{h} \quad \boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{d}) \\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\boldsymbol{c}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^T = \begin{bmatrix} x & y & h & s & d \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}^T = \begin{bmatrix} 18 & 42 & 24 \end{bmatrix}$$

```
dvar float+ x;
dvar float+ y;
dvar float+ h;
dvar float+ s;
dvar float+ d;
maximize 3*x+2*y;
subject to
{
2*x +    y + h      == 18;
2*x + 3*y +    s    == 42;
3*x +    y +      d == 24;
```

OPL

```
// solution (optimal) with objective 33
x = 3;
y = 12;
h = 0;
s = 0;
d = 3;
```

Ejemplo: simplex algebraico

Una vez llevado el problema a la forma estándar es evidente que los tres vectores columna de $\boldsymbol{A}$ correspondientes a las variables de holgura constituyen una base factible que utilizaremos como punto de partida del método del simplex:

1)

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{array}{c} (\ \boldsymbol{h} \quad \boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{d}\ ) \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}; \boldsymbol{B}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} h \\ s \\ d \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_1^{-1} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 42 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 42 \\ 24 \end{bmatrix}$$

2)

$$\boldsymbol{y}_x = \boldsymbol{B}_1^{-1} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}; \boldsymbol{y}_y = \boldsymbol{B}_1^{-1} \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

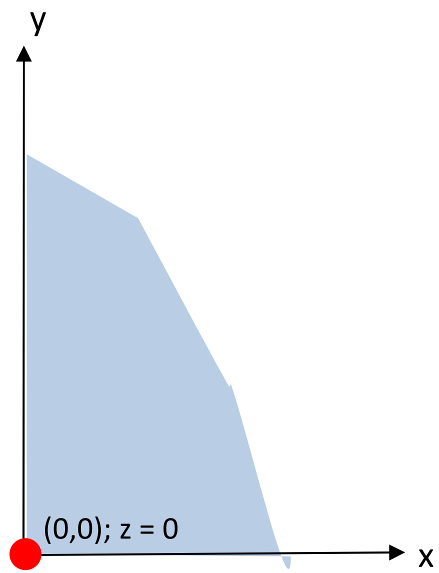
$$z_x = \boldsymbol{c}_{B_1} \cdot \boldsymbol{y}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 0; z_y = \boldsymbol{c}_{B_1} \cdot \boldsymbol{y}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$z_x - c_x = -3; z_y - c_y = -2;$$

3)

$$Max\left\{ |\, z_x - c_x \,|, |\, z_y - c_y \,| \right\} = \{3, 2\} = 3 \Rightarrow \boldsymbol{x} \textit{ entra en la base}$$

$$Min\left\{ \frac{h}{y_{x1}}, \frac{s}{y_{x2}}, \frac{d}{y_{x3}} \right\} = \left\{ \frac{18}{2}, \frac{42}{2}, \frac{24}{3} \right\} = \{9, 21, 8\} = 8 \Rightarrow \boldsymbol{d} \textit{ deja la base}$$



Ejemplo: simplex algebraico

Repetimos el proceso con la nueva base $\boldsymbol{B_2}$:

1)

$$\begin{array}{c} \quad (\,h \quad s \quad x\,) \\ \boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array} ; \boldsymbol{B}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,6667 \\ 0 & 1 & -0,6667 \\ 0 & 0 & 0,3333 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} h \\ s \\ x \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_2^{-1} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,6667 \\ 0 & 1 & -0,6667 \\ 0 & 0 & 0,3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 42 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 26 \\ 8 \end{bmatrix}$$

2)

$$\boldsymbol{y}_y = \boldsymbol{B}_2^{-1}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,6667 \\ 0 & 1 & -0,6667 \\ 0 & 0 & 0,3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,333 \\ 2,333 \\ 0,333 \end{bmatrix}; \boldsymbol{y}_d = \boldsymbol{B}_2^{-1}\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,6667 \\ 0 & 1 & -0,6667 \\ 0 & 0 & 0,3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,6667 \\ -0,6667 \\ 0,3333 \end{bmatrix};$$

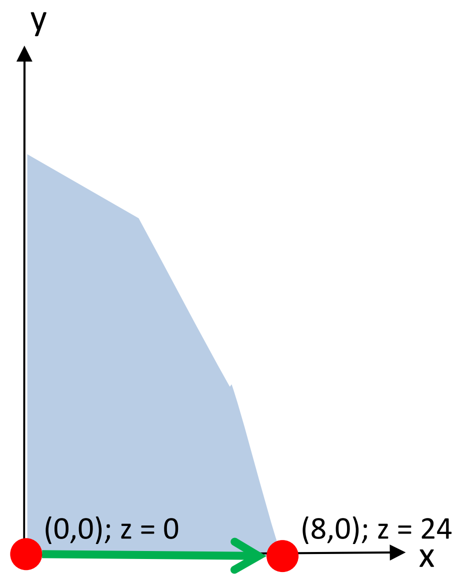
$$z_y = \boldsymbol{c}_{B_2} \cdot \boldsymbol{y}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,333 \\ 2,333 \\ 0,333 \end{bmatrix} = 0,666; z_d = \boldsymbol{c}_{B_2} \cdot \boldsymbol{y}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,6667 \\ -0,6667 \\ 0,3333 \end{bmatrix} = 0,6666;$$

$$z_y - c_y = 0,666 - 2 = -1,333; z_d - c_d = 0,6666;$$

3)

$$Max\{|\,z_y - c_y\,|\} = \{1,333\} = 1,333 \Rightarrow \boldsymbol{y} \textit{ entra en la base}$$

$$Min = \left\{ \frac{2}{0,333}, \frac{26}{2,333}, \frac{8}{0,333} \right\} = \{6,\ 11,444,\ 24,024\} = 6 \Rightarrow \boldsymbol{h} \textit{ deja la base}$$



Ejemplo: simplex algebraico

Repetimos el proceso con la nueva base $\boldsymbol{B_3}$:

1)

$$\boldsymbol{B}_3=\begin{array}{c} (\;y\quad s\quad x\;) \\ \begin{bmatrix}1&0&2\\3&1&2\\1&0&3\end{bmatrix}\end{array};\boldsymbol{B}_3^{-1}=\begin{bmatrix}-3&0&2\\5&1&-4\\2&0&-1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}y\\s\\x\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}_3^{-1}\cdot\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}3&0&-2\\-7&1&4\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}18\\42\\24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\12\\6\end{bmatrix}$$

2)

$$\boldsymbol{y}_h=\boldsymbol{B}_3^{-1}\boldsymbol{s}=\begin{bmatrix}-3&0&2\\5&1&-4\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-7\\-1\end{bmatrix};\boldsymbol{y}_d=\boldsymbol{B}_3^{-1}\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix}-3&0&2\\5&1&-4\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\4\\1\end{bmatrix}$$

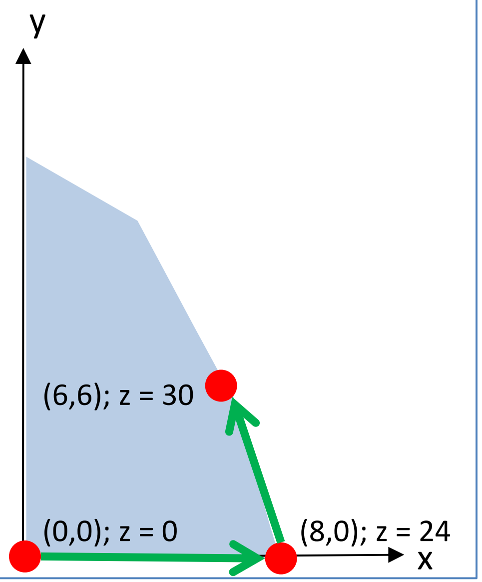
$$z_h=\boldsymbol{c}_{B_3}\cdot\boldsymbol{y}_h=\begin{bmatrix}2&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-7\\-1\end{bmatrix}=3;z_d=\boldsymbol{c}_{B_3}\cdot\boldsymbol{y}_d=\begin{bmatrix}2&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\4\\1\end{bmatrix}=-1$$

$$z_h-c_h=3;z_d-c_d=-1;$$

3)

$$Max\{|\,z_d-c_d\,|\}=\{1\}=1\Rightarrow \boldsymbol{d}\ entra\ en\ la\ base$$

$$Min=\left\{\frac{12}{4},\frac{6}{1}\right\}=Min\{3,\ 6\}=3\Rightarrow \boldsymbol{s}\ deja\ la\ base$$



Ejemplo: simplex algebraico

Repetimos el proceso con la nueva base $\boldsymbol{B_4}$:

1)

$$\boldsymbol{B}_4=\begin{array}{c}(\;y\;\;\;\boldsymbol{d}\;\;\;x\;)\\ \begin{bmatrix}1&0&2\\3&0&2\\1&1&3\end{bmatrix}\end{array};\boldsymbol{B}_4^{-1}=\begin{bmatrix}-0,5&0,5&0\\-1,75&0,25&1\\0,75&-0,25&0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}y\\d\\x\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}_4^{-1}\cdot\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-0,5&0,5&0\\-1,75&0,25&1\\0,75&-0,25&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}18\\42\\24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\3\\3\end{bmatrix}$$

2)

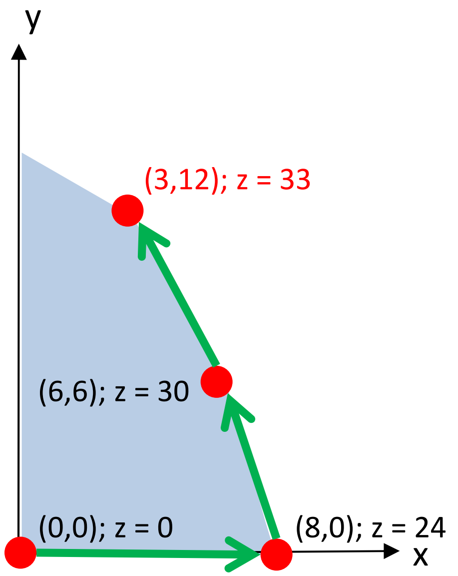
$$\boldsymbol{y}_h=\boldsymbol{B}_4^{-1}\boldsymbol{h}=\begin{bmatrix}-0,5&0,5&0\\-1,75&0,25&1\\0,75&-0,25&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0,5\\-1,75\\0,75\end{bmatrix};\boldsymbol{y}_s=\boldsymbol{B}_4^{-1}\boldsymbol{s}=\begin{bmatrix}-0,5&0,5&0\\-1,75&0,25&1\\0,75&-0,25&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,5\\0,25\\-0,25\end{bmatrix}$$

$$z_h=\boldsymbol{c}_{B_3}\cdot\boldsymbol{y}_h=\begin{bmatrix}2&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0,5\\-1,75\\0,75\end{bmatrix}=1,25;z_d=\boldsymbol{c}_{B_3}\cdot\boldsymbol{y}_d=\begin{bmatrix}2&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0,5\\0,25\\-0,25\end{bmatrix}=0,25$$

3)

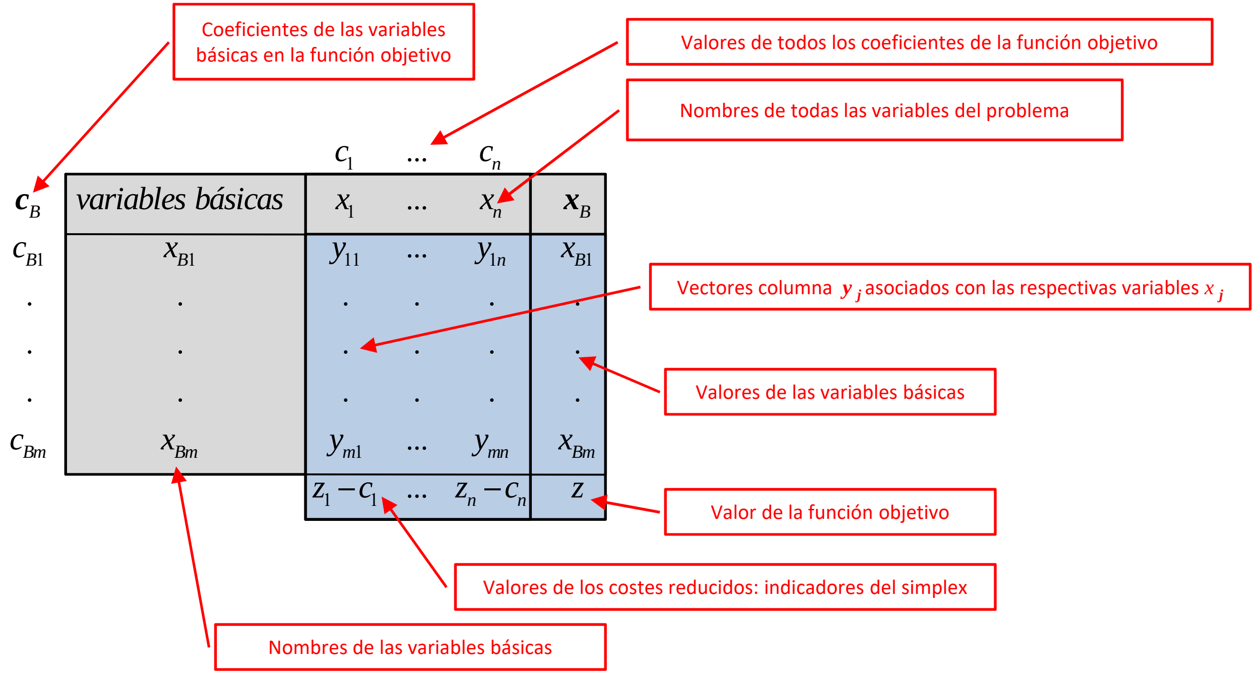
No es posible mejorar

$$z=\boldsymbol{c}_{B_3}\cdot\begin{bmatrix}y\\d\\x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\3\\3\end{bmatrix}=33$$



Simplex tabular

Esta versión del Simplex permite situar la información del problema inicial y las distintas iteraciones en forma tabular, que resulta más cómodo si el problema se resuelve de forma manual. En el siguiente esquema especificamos la forma de construir la tabla inicial del método que corresponde a la solución básica factible de partida



Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
&Maximizar \quad z = 3x + 2y \\
&sujeto\ a: \quad 2x + y + h \qquad = 18 \\
&\qquad\qquad\quad 2x + 3y + s \qquad = 42 \\
&\qquad\qquad\quad 3x + y + \qquad d = 24 \\
&\qquad\qquad\quad x \geq 0, y \geq 0
\end{aligned}
$$

		3	2	0	0	0	
		x	y	h	s	d	
0	h	2	1	1	0	0	18
0	s	2	3	0	1	0	42
0	d	3	1	0	0	1	24
		–3	–2	0	0	0	0

Simplex tabular: algoritmo

1) Si existe algún valor $z_j - c_j < 0 \Rightarrow$ que existe posibilidad de mejora y vamos al paso 2).

   Si todo $z_j - c_j \geq 0 \Rightarrow$ la actual solución es la óptima y el problema **FACTIBLE**: **FIN**

2) Si para algún $z_j - c_j < 0$ es su vector asociado $\mathbf{y}_j \leq 0$ el problema es **NO ACOTADO**, en caso contrario vamos al paso 3)

3) Selección de las variables de entrada y salida: se selecciona como variable de entrada aquella con valor más negativo de $z_j - c_j$ y la designaremos por x_k siendo k la columna pivote. Se selecciona como variable de salida aquella que haga mínima la razón x_{Bi}/y_{ik} para $y_{ik} > 0$ La fila con mínima razón la designamos por r y se denomina fila pivote. El elemento y_{rk} se denomina pivote.

4) Cálculo de la nueva tabla:

   a) Se construye una nueva tabla vacía en la que se sustituye la variable básica x_{Br} de salida por la nueva variable básica x_k y c_{Br} por c_k

   b) La fila r de la nueva tabla se obtiene dividiendo la fila r de la precedente por el pivote y la columna k de la nueva tabla se forma con ceros excepto el lugar del pivote que se pone a 1.

   c) Los restantes elementos de la tabla los obtenemos restando de los antiguos el valor de a dado por la siguiente expresión:

$$\hat{y}_{ij} = y_{ij} - a$$
$$\hat{x}_{ij} = x_{ij} - a$$
$$(\hat{z}_j - \hat{c}_j) = (z_j - c_j) - a$$
$$\hat{z} = z - a$$

$$a = \frac{e_{rj} \cdot e_{ij}}{y_{rk}} \quad \text{con } (i \neq r)$$

e_{rj} = elemento en la fila pivote de la columna j

e_{ik} = elemento de la fila i de la columna pivote

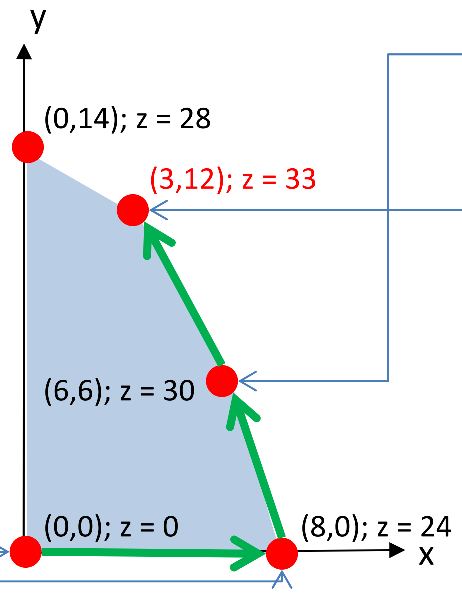
Ejemplo: simplex tabular

	x	y	h	s	d	
h	2	1	1	0	0	18
s	2	3	0	1	0	42
d	3	1	0	0	1	24
	−3	−2	0	0	0	0

$\frac{18}{2}=9;\quad \frac{42}{2}=21;\quad \boxed{\frac{24}{3}=8}$

	x	y	h	s	d	
h	0	$1/3$	1	0	$-2/3$	2
s	0	$7/3$	0	1	$-2/3$	26
x	1	$1/3$	0	0	$1/3$	8
	0	−1	0	0	1	24

$\boxed{\frac{2}{1/3}=6;}\quad \frac{26}{7/3}=11{,}1;\quad \frac{8}{1/3}=24$



	x	y	h	s	d	
y	0	1	3	0	−2	6
s	0	0	−7	1	4	12
x	1	0	$-1/3$	0	1	6
	0	0	1	0	−1	30

$\boxed{\frac{12}{4}=3;}\quad \frac{6}{1}=6$

	x	y	h	s	d	
y	0				0	**12**
d	0	0	$-7/4$	$1/4$	1	3
x						**3**
	0	1	8	1	0	**33**

Método del Simplex : solución básica inicial

Las *variables de holgura* introducidas para convertir inecuaciones en ecuaciones nos han permitido en el ejemplo anterior disponer de una solución básica inicial fácil de conseguir: la correspondiente a las variables de holgura cuya matriz básica resultaba ser la matriz unidad. Pero si una o más de las restricciones de desigualdad fuese de sentido opuesto, la variable de holgura habría que introducirla restando, por lo que la correspondiente solución básica no sería factible. Por ejemplo, si cambiamos el sentido de la desigualdad en la primera restricción del ejemplo anterior tendremos:

$$\begin{aligned} &\textit{Maximizar} \quad z = 3x + 2y \\ &\textit{sujeto a}: \quad 2x + y \boxed{\geq} 18 \\ &\qquad 2x + 3y \leq 42 \\ &\qquad 3x + y \leq 24 \\ &\qquad x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{forma estándar}} \quad \begin{aligned} &\textit{Maximizar} \quad z = 3x + 2y \\ &\textit{sujeto a}: \quad 2x + y \boxed{-h} = 18 \\ &\qquad 2x + 3y + s = 42 \\ &\qquad 3x + y + d = 24 \\ &\qquad x, y, h, s, d \geq 0 \end{aligned}$$

```
dvar float+ x;
dvar float+ y;
dvar float+ z;

maximize 3*x+2*y;

subject to
{
2*x+y >= 18;
2*x + 3*y <= 42;
3*x + y <= 24;
```

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} h & s & d \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}; \boldsymbol{B}_1^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \bar{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} h \\ s \\ d \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_1^{-1} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 42 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{-18} \\ 42 \\ 24 \end{bmatrix}$$

// solution (optimal) with objective 35.1
x = 4.2857;
y = 11.143;

$\boldsymbol{B_1}$ es una matriz básica pero no es factible ya que una de las variables de decisión (h) toma valor negativo (-18) por lo que no se puede utilizar para iniciar el método del simplex.

En estos casos podemos introducir *variables artificiales* en las correspondientes ecuaciones para disponer de una base factible. Por ejemplo, introduciendo la variable artificial a en la primera restricción del problema anterior tenemos:

Variable artificial

$$\begin{aligned} &\textit{Maximizar} \quad z = 3x + 2y \\ &\textit{sujeto a}: \quad 2x + y - h + a = 18 \\ &\qquad 2x + 3y + s = 42 \\ &\qquad 3x + y + d = 24 \\ &\qquad x, y, h, s, d, a \geq 0 \end{aligned}$$

Variables de holgura

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} a & s & d \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}; \boldsymbol{B}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \bar{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} a \\ s \\ d \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_1^{-1} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 42 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 42 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Con la introducción de la variable artificial a hemos conseguido de nuevo una base factible $\boldsymbol{B_1}$ con la que iniciar el método del simplex, sin embargo en este caso el problema transformado no es equivalente. Es evidente que una solución factible del problema transformado en la que la variable a = 0, será también una solución factible del problema original.

Método del Simplex : solución básica inicial con variables artificiales

Existen dos métodos para resolver un problema de programación lineal (*problema original*) que se ha convertido en uno artificial (*problema aumentado*) con la introducción de variables artificiales: el método de las dos fases y el método de las penalizaciones.

Método de las dos fases

Fase 1: Se determinar si el problema original es factible y en caso afirmativo se calcula una solución factible inicial. Para ello se resuelve el problema que resulta de sustituir la función objetivo original por la la suma de las variables artificiales:

$$\begin{aligned} &Minimizar \;\; t = \boldsymbol{1}\cdot \boldsymbol{x}_a \\ &sujeto\ a: \quad \boldsymbol{A}_a \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_a \\ \boldsymbol{x} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \; ; \boldsymbol{x}_a, \boldsymbol{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Si se dispone de una solución básica factible de este problema auxiliar con t = 0 entonces se dispone de una solución básica factible del problema original.

Fase 2: Se aplica el método del simplex partiendo de la solución básica factible obtenida en la fase 1, ahora con la función objetivo original.

Método de las penalizaciones

Este método consiste en forzar las variables artificiales a que tomen un valor nulo en la solución óptima introduciendo estas variables en la función objetivo con unos coeficientes M para un problema de minimización y –M para uno de maximización , siendo M un número positivo arbitrariamente grande, es decir, un número siempre mayor que cualquier otro con el que se compare en la aplicación del método. Por esta razón se le denomina como el *método de la gran M* (*big M method*).

Problema original

$$\begin{aligned} &Maximizar \;\; z = \boldsymbol{c}\cdot \boldsymbol{x} \\ &sujeto\ a: \quad \boldsymbol{A}_a \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_a \\ \boldsymbol{x} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \; ; \boldsymbol{x}_a, \boldsymbol{x} \geq 0 \\ &\boldsymbol{m}^T = [-M \quad \ldots \quad -M] \end{aligned}$$

$\longrightarrow$

Problema aumentado

$$\begin{aligned} &Maximizar \;\; z = -\boldsymbol{m}\cdot \boldsymbol{x}_a + \boldsymbol{c}\cdot \boldsymbol{x} \\ &sujeto\ a: \quad \boldsymbol{A}_a \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_a \\ \boldsymbol{x} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \; ; \boldsymbol{x}_a, \boldsymbol{x} \geq 0 \\ &\boldsymbol{m}^T = [-M \quad \ldots \quad -M] \end{aligned}$$

1) Si uno de los problemas no tiene óptimo finito el otro tampoco lo tiene.
2) Toda solución factible del problema original también lo es del problema aumentado (basta tomar $\boldsymbol{x}_a = \boldsymbol{0}$)
3) Toda solución factible del problema aumentado que no contenga variables artificiales estrictamente positivas es una solución factible del problema original.

Ejemplo: simplex tabular

En una refinería de petróleo se producen habitualmente diferentes tipos de productos derivados, como gasolina, gas butano y polietileno, este último utilizado en la fabricación de plásticos. Para llevar a cabo el proceso de refinamiento, se utilizan diferentes tipos de petróleo, como *Arabian Light*, producido en Arabia Saudí, y *Brent*, el petróleo de referencia en el mercado europeo. La cantidad en metros cúbicos (m^3) que deben consumirse de cada tipo de petróleo para poder producir un barril de cada uno de los tipos de productos derivados, así como las cantidades disponibles de cada tipo de petróleo y el precio en dólares por metro cúbico al que se debe vender cada tipo de derivado, se recoge en la siguiente tabla:

Tipo petróleo	Gasolina	Gas Butano	Polietileno	Disponibilidad
Arabian Light	$1\ m^3$	$2\ m^3$	$2\ m^3$	$30\ m^3$
Brent	$2\ m^3$	$1\ m^3$	$2\ m^3$	$45\ m^3$
Precio venta	$7\ dólares\ por\ m^3$	$4\ dólares\ por\ m^3$	$3\ dólares\ por\ m^3$	

Queremos determinar la cantidad a producir de cada tipo de derivado del petróleo (gasolina, gas butano y polietileno) de manera que el beneficio total que obtenga la refinería de petróleo sea el *máximo* posible.

Maximizar $\quad z = 7x_1 + 4x_2 + 3x_3$

Sujeto a las restricciones

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 30$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 45$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

En forma matricial, para el caso concreto $n = 3$ y $m = 2$:

Maximizar o Minimizar $\quad z = c^T x$

Sujeto a las restricciones

$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

donde se tienen las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 30 \\ 45 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos cada una de las soluciones básicas factibles y el valor correspondiente de la función objetivo:

$$x_B = B^{-1}b_B, \qquad z_B = c_B^T x_B.$$

Por ejemplo, para $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$x_{B_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B_1^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$z_{B_1} = 20 \times 7 + 5 \times 4 = 160$$

Para $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$:

$$x_{B_2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = B_2^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

$$z_{B_2} = 15 \times 7 + 3 \times \frac{15}{2} = 127{,}5$$

y así sucesivamente se calcularían x_{B_3}, x_{B_4}, …, $x_{B_{10}}$ y sus valores correspondientes $z_3, z_4, \ldots, z_{10}$. De todas las soluciones factibles, la que da lugar al valor máximo de la función de coste es: $x_1 = 20, x_2 = 5, z = 160$.

Maximizar $z = 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 0y_1 + 0y_2$

Sujeto a las restricciones

$$1x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 1y_1 + 0y_2 = 30$$
$$2x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 0y_1 + 1y_2 = 45$$
$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0$$

En el ejemplo, el algoritmo del simplex parte de una solución básica factible inicial correspondiente a un punto extremo de la región factible. En nuestro caso, aprovechando las variables de holgura y_1 e y_2 introductidas, la elección más sencilla corresponde a la base

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

		7	4	3	0	0	
c_{B_1}	x_{B_1}	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
0	y_1	1	2	2	1	0	30
0	y_2	2	1	2	0	1	45
	$z_i - c_i$	-7	-4	-3	0	0	0

La **fase de iteración** consiste en desplazarse por los distintos puntos extremos de la región factible, sin tener que representarlos gráficamente, hasta encontrar aquel en el que la función objetivo tome su valor máximo. Para ello se sigue el algoritmo, conocido como **algoritmo del Simplex**:

1) Si existe algún valor $z_j - c_j < 0$ entonces existe posibilidad de mejora y vamos al paso 2). Si todo $z_j - c_j \geq 0$ entonces la actual solución es la **óptima** y problema es **factible**.

2) Si para algún $z_j - c_j < 0$ es su vector asociado $y_j \leq 0$ entonces el problema es **no acotado**, en caso contrario, vamos al paso 3).

3) *Selección de las variables de entrada y salida*: se selecciona como **variable de entrada** aquella con valor más negativo de $z_j - c_j$ y la designaremos por x_k siendo k la columna **pivote**. Se selecciona como **variable de salida** aquella que haga mínima la razón $\frac{x_{Bi}}{y_{ik}}$ para $y_{ik} > 0$. La fila con mínima razón la designamos por r y se denomina **fila pivote**. El elemento y_{rk} se denomina **pivote**.

4) Cálculo de la nueva tabla:

a) Se construye una nueva tabla vacía en la que se sustituye la variable básica x_{Br} de salida por la nueva variable básica x_k y c_{Br} por c_k.

b) La fila r de la nueva tabla se obtiene dividiendo la fila r de la precedente por el pivote y la columna k de la nueva tabla se forma con ceros excepto el lugar del pivote que se pone a 1.

c) Los elementos restantes de la tabla los obtenemos restando de los antiguos el valor de a dado por la siguiente expresión:

$$\widehat{y_{ij}} = y_{ij} - a,$$
$$\widehat{x_{ij}} = x_{ij} - a,$$
$$\widehat{z_j} - \widehat{c_j} = (z_j - c_j) - a$$
$$\hat{z} = z - a$$

donde

$a = \frac{e_{rj} \times e_{ij}}{y_{rk}}$ para $i \neq r$

e_{rj} = elemento en la fila pivote de la columna j.

e_{ik} = elemento de la fila i de la columna pivote.

En el ejemplo, como en la primera tabla existen valores $z_j - c_j < 0$ y su vector asociado en la tabla es positivo, hay que aplicar la **fase de iteración** del algoritmo del Simplex: la variable x_1 entra a formar parte de la base, mientras que es la variable y_2 quien deja de formar parte de la solución. El valor del elemento pivote sería 2. Con estos elementos construimos la nueva tabla del Simplex asociada ahora a la base

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

		7	4	3	0	0	
$\boldsymbol{c_{B_2}}$	$\boldsymbol{x_{B_2}}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{y_1}$	$\boldsymbol{y_2}$	
0	$\boldsymbol{y_1}$	0	1,5	1	1	−0,5	7,5
7	$\boldsymbol{x_1}$	1	0,5	1	0	0,5	22,5
	$\boldsymbol{z_i - c_i}$	0	−0,5	4	0	3,5	157,5

Como todavía existen valores $z_j - c_j < 0$ y su vector asociado en la tabla es positivo, hay que seguir iterando el algoritmo del Simplex.

En este caso, es la variable y_1 la que deja de formar parte de la base, entrando en su lugar la variable x_2. Ahora, el valor 1,5 es el nuevo pivote. La nueva tabla del Simplex correspondería ahora a la base

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

para la cual sabemos que se obtiene la solución óptima:

		7	4	3	0	0	
c_{B_3}	x_{B_3}	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
4	x_2	0	1	$2/3$	$2/3$	$-1/3$	5
7	x_1	1	0	$2/3$	$-1/3$	$2/3$	20
	$z_i - c_i$	0	0	$13/3$	$1/3$	$10/3$	160

Como en esta tabla ya todos los $z_j - c_j \geq 0$ llegamos a la última fase del método del Simplex, la **fase de detención**. La *solución óptima* que se ha obtenido mediante la aplicación del *método del Simplex* sería $x_1 = 20$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, con valor $z = 160$ de la función objetivo.

```
// Variables de decisión
dvar float+ x1;
dvar float+ x2;
dvar float+ x3;
// Función objetivo
maximize 7*x1 + 4*x2 + 3*x3;

// Restricciones
subject to
{
  x1 + 2*x2 + 2*x3 <= 30;
  2*x1 + x2 + 2*x3 <= 45;
}

// Solución (optima) con objetivo 160
x1 = 20;
x2 = 5;
x3 = 0;
```

Ejercicio

Dado el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} &\textit{Maximizar} \quad z = 4x_1 + x_2 \\ &\textit{sujeto a :} \quad -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ &\qquad\qquad\quad 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ &\qquad\qquad\quad 4x_1 - 4x_2 \leq 12 \\ &\qquad\qquad\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a) Pasarlo a la forma estándar equivalente

b) Resolverlo enumerando las soluciones básicas factibles y calculando la función objetivo en cada una de ellas.

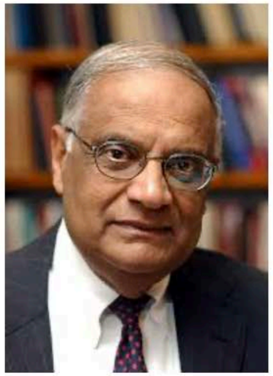
c) Resolverlo utilizando el método del simplex algebraico o tabular

GEORGE BERNARD DANTZIG

Cierto día del año 1939, el matemático estadounidense George Bernard Dantzig (1914-2005), padre del método del Simplex, llegó demasiado tarde a sus clases de doctorado en la Universidad de Berkeley. Cuando entró en el aula se la encontró ya vacía, pero en la pizarra todavía permanecían escritos dos problemas matemáticos. George pensó que debían ser los problemas que su profesor les había dejado como tarea para hacerlos en su casa y entregarlos al inicio de la siguiente clase. Sin dudarlo, Dantzig copió sus enunciados en su cuaderno y salió del aula. Aunque los problemas le resultaron más complicados de resolver que los que habitualmente su profesor les mandaba, consiguió entregar su solución al inicio de la siguiente clase, a la que sí consiguió llegar puntualmente. El profesor, manifestando su extrañeza y sorpresa, le dijo al joven George que los problemas los había puesto solo como curiosidad y para que tuvieran conocimiento de ellos, ya que aun permanecían por resolver en la comunidad matemática. Varias semanas más tarde, la solución de ambos problemas matemáticos fue publicada, lo que hizo que Dantzig lograra entrar con fuerza en el mundo de las matemáticas. Gracias a su impuntualidad, consiguió resolver dos complicados problemas que habían mantenido en jaque a los más grandes matemáticos de su tiempo. Sin duda la historia del joven Dantzig llamó la atención de los guionistas de Hollywood, quienes no dudaron en adaptar en 1997 la anécdota e incluirla en la película *El indomable Will Hunting*, logrando ganar el premio Óscar al mejor guion original.

Tras completar sus estudios de doctorado, desarrolló una tesis doctoral sobre los grandes problemas de las matemáticas que aun permanecían sin resolver. Sin embargo, el estallido de la Segunda Guerra Mundial le impidió defenderla, algo que solo consiguió hacer en 1946 cuando termino la guerra y pudo volver a Berkeley. Tras su paso por la Universidad, pasó a ocupar un puesto en el Pentágono como asesor matemático, lo que le permitió conocer de cerca problemas reales de optimización matemática que afectaban a las Fuerzas Aéreas. Gracias a ello, consiguió desarrollar el algoritmo del Simplex para resolver de forma eficiente problemas de programación lineal durante el verano de 1947, usándose en secreto hasta su publicación en ese mismo año. En 1952 pasó a ocupar un importante puesto en la *RAND Corporation* como investigador matemático.

EL ALGORITMO DE KARMARKAR



Actualmente, para resolver problemas de programación lineal del mundo real en los que el número de variables de decisión y de restricciones puede llegar a ser de miles, se utiliza habitualmente alguna versión mejorada del método del Simplex. Sin embargo, hoy en día existen métodos más potentes para la resolución de problemas de programación lineal, como el descubierto por el matemático indio Narendra Karmarkar (1955), quien en 1984 diseñó en los laboratorios *AT&T Bell* un método aun más rápido que el método del Simplex para resolver cierto tipo de problemas en los que intervienen más de 20.000 variables de decisión, y que habitualmente se plantean en el diseño de redes de conexión telefónica entre ciudades. Por ejemplo, uno de estos problemas, el cual incluía el manejo de hasta 800.000 variables de decisión, pudo resolverse en tan solo diez horas mediante un programa informático que codificaba el método diseñado por Karmarkar. Si se hubiera utilizado el método del Simplex para su resolución se estima que hubieran sido necesarias varias semanas hasta obtener el mismo resultado. A pesar de ello, el método del Simplex se sigue hoy en día explicando en prácticamente todas las clases de matemáticas de cualquier universidad, pues se prefiere su uso cuando se ha de aplicar a problemas con un número no excesivo de variables de decisión y de restricciones, obteniéndose casi siempre muy buenos resultados.

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Rafael del Vado Vírseda
rdelvado@sip.ucm.es

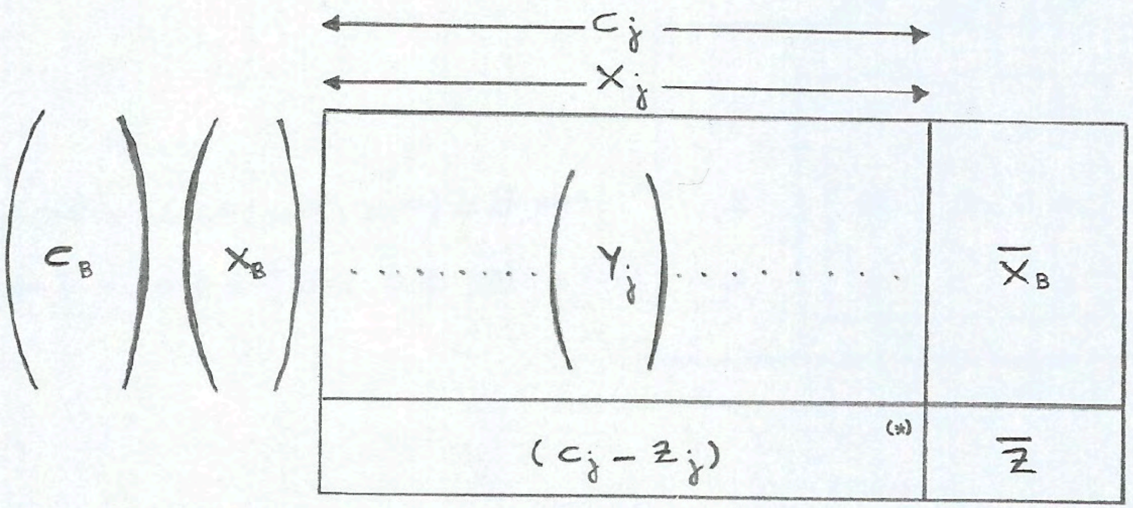
APÉNDICE DEL TEMA 4

EJEMPLOS RESUELTOS

1. MÉTODO DEL SIMPLEX TABULAR
2. MÉTODO DE LAS PENALIZACIONES
3. MÉTODO DE LAS DOS FASES
4. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Método del simplex tabular

Sea el PPL
$$\begin{cases} \text{Min } c^T \cdot x \\ Ax \leq b \ \wedge \ x \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$$



$$\overline{x}_B = B^{-1} \cdot b$$
$$\overline{z} = c_B^T \cdot \overline{x}_B$$
$$Y_j = B^{-1} \cdot a_j$$
$$z_j = c_B^T \cdot Y_j$$
$$c_j - z_j = c_j - c_B^T Y_j$$

A esta tabla se la llama TABLA DEL SIMPLEX. ((*) Usaremos $c_j - z_j$ en vez de $z_j - c_j$)

Ejemplo 1

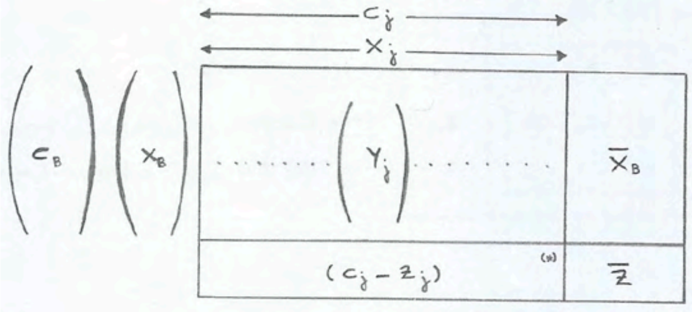
$$\begin{cases} \text{Min}\{-3x_1+2x_2-x_3+10x_4+x_5\} \ \underline{\text{sujeto a}} \\ -x_1+2x_3+x_4+3x_5 \leq 4 \\ x_2+3x_3-2x_4 \leq 2 \\ x_1-2x_2+x_4+2x_5 \leq 3 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Pasamos a la forma estandar usando variables de holgura:

$$\begin{cases} \text{Min}\{-3x_1+2x_2-x_3+10x_4+x_5+0\cdot x_{s1}+0\cdot x_{s2}+0\cdot x_{s3}\} \\ -x_1+2x_3+x_4+3x_5+x_{s1}=4 \\ x_2+3x_3-2x_4+x_{s2}=2 \\ x_1-2x_2+x_4+2x_5+x_{s3}=3 \\ x_i \geq 0,\ x_{s1}, x_{s2}, x_{s3} \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1

$$\begin{cases} \text{Min}\{-3x_1+2x_2-x_3+10x_4+x_5+0\cdot x_{s1}+0\cdot x_{s2}+0\cdot x_{s3}\} \\ -x_1+2x_3+x_4+3x_5+x_{s1}=4 \\ x_2+3x_3-2x_4+x_{s2}=2 \\ x_1-2x_2+x_4+2x_5+x_{s3}=3 \\ x_i\geq 0,\ x_{s1},x_{s2},x_{s3}\geq 0 \end{cases}$$



$\overline{x}_B = B^{-1}\cdot b$

$\overline{z} = c_B^T\cdot\overline{x}_B$

$Y_j = B^{-1}\cdot a_j$

$z_j = c_B^T\cdot Y_j$

$c_j - z_j = c_j - c_B^T Y_j$

$$\begin{array}{cccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_{s1} & x_{s2} & x_{s3} & \\ \hline -1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

$\rightsquigarrow B=(a_{s1},a_{s2},a_{s3})$, $B\subset A$

$|B|\neq 0$, $B^{-1}\cdot b\geq 0$, $J=\{1,2,3,4,5\}$

Podríamos tomar $B=(a_{s1}, a_{s2}\ a_{s3})$; que nos daría la solución básica factible: $x=\begin{pmatrix} x_B \\ \hline x_N \end{pmatrix}$

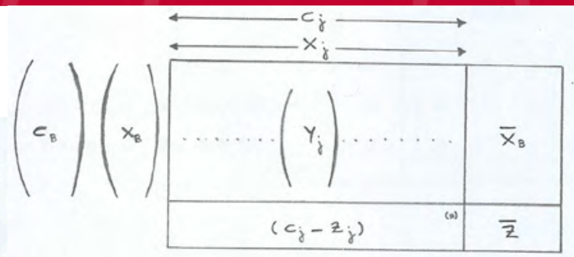
$x_{s1}=4$

$x_{s2}=2$

$x_{s3}=3$

$x_1=\cdots=x_5=0$

Ejemplo 1



$\bar{x}_B = B^{-1} \cdot b$

$\bar{z} = c_B^T \cdot \bar{x}_B$

$Y_j = B^{-1} \cdot a_j$

$z_j = c_B^T \cdot Y_j$

$c_j - z_j = c_j - c_B^T Y_j$

Completamos, entonces, la tabla del Simplex:

		-3	2	-1	10	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_{s1}	x_{s2}	x_{s3}	
0	x_{s1}	-1	0	2	1	3	1	0	0	4
0	x_{s2}	0	1	3	-2	0	0	1	0	2
0	x_{s3}	1	-2	0	1	2	0	0	1	3
		-3	2	-1	10	1	0	0	0	0

Solución básica factible

estamos en el caso en el que: $\exists\, k \in J \,/\, \underbrace{c_k - z_k < 0}_{z_k - c_k > 0}$ y además:

$\forall\, j \in J \,/\, \underbrace{c_j - z_j < 0}_{z_j - c_j > 0} \wedge Y_j \not\leq 0$ luego, necesitamos hacer un cambio de base.

Para ello, sabemos que:

Ejemplo 1

		-3	2	-1	10	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_{s1}	x_{s2}	x_{s3}	
0	x_{s1}	-1	0	2	1	3	1	0	0	4
0	x_{s2}	0	1	3	-2	0	0	1	0	2
0	x_{s3}	1	-2	0	1	2	0	0	1	3
		-3	2	-1	10	1	0	0	0	0

- CRITERIO DE ENTRADA: $\min\{c_j - z_j \,/\, \underbrace{c_j - z_j < 0}_{z_j - c_j > 0}\} \equiv c_k - z_k \rightsquigarrow$ entra a_k : $k = 1$

- CRITERIO DE SALIDA: sale a_l / $\dfrac{\bar{x}_l}{y_{lk}} \doteq \min\left\{\dfrac{\bar{x}_s}{y_{sk}} \,/\, y_{sk} > 0\right\} = \min\left\{\dfrac{\bar{x}_s}{y_{s1}}, y_{s1} > 0\right\} = 3/1$,

  $s \in I = \{s1, s2, s3\}$

  luego, sale a_l : $l = s3$ $\rightsquigarrow$ PIVOTE : $y_{s3,1} = 1$

Por tanto, pasamos de la base $B = \{a_{s1}, a_{s2}, a_{s3}\}$ a la nueva base $B' = \{a_{s1}, a_{s2}, a_1\}$. Para ello, construiríamos una nueva tabla del "simplex":

Ejemplo 1

Mediante transformaciones elementales de matrices: (sumamos a la primera fila de la primera tabla del simplex la tercera fila)

		-3	2	-1	10	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_{s1}	x_{s2}	x_{s3}	
0	x_{s1}	-1	0	2	1	3	1	0	0	4
0	x_{s2}	0	1	3	-2	0	0	1	0	2
0	x_{s3}	1	-2	0	1	2	0	0	1	3
		-3	2	-1	10	1	0	0	0	0

		-3	2	-1	10	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_{s1}	x_{s2}	x_{s3}	
0	x_{s1}	0	-2	2	2	5	1	0	1	7
0	x_{s2}	0	1	3	-2	0	0	1	0	2
-3	x_1	1	-2	0	1	2	0	0	1	3
		0	-4	-1	13	7	0	0	3	-9

Solución básica factible mejor que la anterior

→ se mejora la solución: $-9 < 0$ (Minimizar)

Ejemplo 1

De esta forma, seguiríamos iterando el proceso:

Hay un nuevo cambio de base: entra a_2 y sale a_{s2} (el PIVOTE es ahora: $Y_{s2,2}=1$)

La nueva base es, pues: $B''=\{a_{s1}, a_2, a_1\}$. Para construir su tabla del Simplex, sumamos a la primera y tercera fila de la tabla anterior la segunda fila multiplicada por 2 y completamos el resto de la nueva tabla:

		-3	2	-1	10	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_{s1}	x_{s2}	x_{s3}	
0	x_{s1}	0	-2	2	2	5	1	0	1	7
0	x_{s2}	0	1	3	-2	0	0	1	0	2
-3	x_1	1	-2	0	1	2	0	0	1	3
		0	-4	-1	13	7	0	0	3	-9

		-3	2	-1	10	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_{s1}	x_{s2}	x_{s3}	
0	x_{s1}	0	0	8	-2	5	1	2	1	11
2	x_2	0	1	3	-2	0	0	1	0	2
-3	x_1	1	0	6	-3	2	0	2	1	7
		0	0	11	5	7	0	4	3	-17

Solución básica factible ÓPTIMA $\rightarrow x = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

-17 → el mínimo valor posible de la función objetivo.

Aplicando el ALGORITMO DEL SIMPLEX, como: $c_j - z_j \geq 0,\ \forall j \in J \Leftrightarrow z_j - c_j \leq 0,\ \forall j \in J$, se tiene que: $x_1 = 7,\ x_2 = 2,\ x_3 = x_4 = x_5 = x_{s2} = x_{s3} = 0,\ x_{s1} = 11$ es SOLUCIÓN ÓPTIMA de este PPL. //

2. Método de las dos fases

METODO DE LAS DOS FASES:

Supongamos el PPL:

$$P:\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \quad (b \geq 0) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

el METODO DE LAS DOS FASES resuelve P mediante la formulación y resolución de otros dos PPL (Dos fases):

· 1ª FASE: Se resuelve el PPL P'' siguiente:

$$P'':\begin{cases} \text{Min}\left\{\sum_{i=1}^{m} x_{a_i}\right\} \\ Ax + I x_a = b \\ x, x_a \geq 0 \end{cases} \rightsquigarrow (x^*, x_a^*) \text{ solución óptima} \Rightarrow \begin{cases} x_a^* = 0 \Rightarrow \overbrace{\text{Resolver el problema P con sol. básica inicial } (x^*)}^{2^a \text{ FASE}} \\ x_a^* \neq 0 \Rightarrow \nexists \text{ sol. Factible de P} \end{cases}$$

($x_a \equiv$ Variables artificiales)

Ejemplo 1

Resolver el siguiente PPL mediante el METODO DE LAS DOS FASES:

$$\text{Min } \{6x_1 + 2x_2 + x_3\} \text{ sujeta a}$$

$$x_1 + 2x_2 = 6$$

$$3x_1 + x_3 = 6$$

$$x_i \geq 0$$

- 1ª FASE: Resolvemos el problema P''

$$
\begin{array}{cc|ccccc|c}
 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_{a_1} & x_{a_2} & \\
\hline
1 & x_{a_1} & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
1 & x_{a_2} & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\
\hline
 & & -4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 12
\end{array}
\longleftarrow P'': \left\{
\begin{array}{l}
\text{Min } \{x_{a_1} + x_{a_2}\} \text{ sujeta a:} \\
x_1 + 2x_2 + x_{a_1} = 6 \\
3x_1 + x_3 + x_{a_2} = 6 \\
x_i, x_{a_i} \geq 0
\end{array}
\right.
$$

Ejemplo 1

		0	0	0	1	1	
		x_1	x_2	x_3	x_{a1}	x_{a2}	
1	x_{a_1}	0	2	$-1/3$	1	$-1/3$	4
0	x_1	1	0	$1/3$	0	$1/3$	2
		0	-2	$1/3$	0	$4/3$	4

		0	0	0	1	1	
		x_1	x_2	x_3	x_{a_1}	x_{a_2}	
0	x_2	0	1	$-1/6$	$1/2$	$-1/6$	2
0	x_1	1	0	$1/3$	0	$1/3$	2
		0	0	0	1	1	0
					≥ 0	≥ 0	

luego, se obtiene la solución óptima de P'':

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* = 2 \\ x_2^* = 2 \\ x_3^* = 0 \end{pmatrix} \qquad x_a^* = \begin{pmatrix} x_{a_1}^* = 0 \\ x_{a_2}^* = 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{P tiene solución factible}$$

Ejemplo 1

- 1ª FASE :

Resolvemos ahora el PPL original con solución básica inicial (x^*)

		6	2	1	
		x_1	x_2	x_3	
2	x_2	0	1	$-1/6$	2
6	x_1	1	0	$1/3$	2
		0	0	$-2/3$	16

		6	2	1	
		x_1	x_2	x_3	
2	x_2	$1/2$	1	0	3
1	x_3	3	0	1	6
		2	0	0	12

Luego, la solución óptima del problema original es: $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 3 \\ x_3^* = 6 \end{pmatrix}$ //

Ejemplo 2

$$\text{Min}\{x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5\} \text{ sujeto a:}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 2 \\ 5x_2 - 4x_3 - x_4 + 5x_5 = 2 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Aplicamos el METODO DE LAS DOS FASES:

- FASE I:

$$\text{Min}\{x_{a_1} + x_{a_2} + x_{a_3}\}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_4 - x_5 + x_{a_1} = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_5 + x_{a_2} = 2 \\ 5x_2 - 4x_3 - x_4 + 5x_5 = 2 \\ x_i, x_{a_i} \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2

		0	0	0	0	0	1	1	1	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_{a_1}	x_{a_2}	x_{a_3}	
1	x_{a_1}	2	−3	0	1	−1	1	0	0	1
1	x_{a_2}	1	1	−2	0	2	0	1	0	2
1	x_{a_3}	0	5	−4	−1	5	0	0	1	2
		−3	−3	6	0	−6	0	0	0	5

		0	0	0	0	0	1	1	1	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_{a_1}	x_{a_2}	x_{a_3}	
1	x_{a_1}	2	−2	−4/5	4/5	0	1	0	1/5	7/5
1	x_{a_2}	1	−1	−2/5	2/5	0	0	1	−2/5	6/5
0	x_5	0	1	−4/5	−1/5	1	0	0	1/5	2/5
		−3	3	6/5	−6/5	0	0	0	6/5	13/5

Ejemplo 2

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_{a_1}	x_{a_2}	x_{a_3}	
		0	0	0	0	0	1	1	1	
0	x_1	1	-1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$1/2$	0	$1/10$	$7/10$
1	x_{a_2}	0	0	0	0	0	$-1/2$	1	$-1/2$	$1/2$
0	x_5	0	1	$-4/5$	$-1/5$	1	0	0	$1/5$	$2/5$
		0	0	0	0	0	$3/2$	0	$3/2$	$1/2$

$\rightsquigarrow x^*_{a_2} = \frac{1}{2} \neq 0$

$\vdash$ No existe solución factible para este problema. //

Ejemplo 3

$$\text{Min}\{x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5\} \text{ sujeto a}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 2 \\ 5x_2 - 4x_3 - x_4 + 5x_5 = 3 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Aplicamos el METODO DE LAS DOS FASES:

- FASE I:

$$\text{Min}\{x_{a_1} + x_{a_2} + x_{a_3}\}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_4 - x_5 + x_{a_1} = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_5 + x_{a_2} = 2 \\ 5x_2 - 4x_3 - x_4 + 5x_5 + x_{a_3} = 3 \\ x_i, x_{a_i} \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 3

		0	0	0	0	0	1	1	1	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_{a_1}	x_{a_2}	x_{a_3}	
1	x_{a_1}	2	-3	0	1	-1	1	0	0	1
1	x_{a_2}	1	1	-2	0	2	0	1	0	2
1	x_{a_3}	0	5	-4	-1	5	0	0	1	3
		-3	-3	6	0	-6	0	0	0	6

		0	0	0	0	0	1	1	1		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_{a_1}	x_{a_2}	x_{a_3}		
1	x_{a_1}	2	-2	-4/5	4/5	0	1	0	1/5	8/5	→ RATIO: 0,8
		Por ejemplo.									
1	x_{a_2}	1	-1	-2/5	2/5	0	0	1	-2/5	4/5	→ RATIO: 0,8
0	x_5	0	1	-4/5	-1/5	1	0	0	1/5	3/5	
		-3	3	6/5	-6/5	0	0	0	6/5	12/5	

Ejemplo 3

		0	0	0	0	0	1	1	1	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_{a_1}	x_{a_2}	x_{a_3}	
1	x_{a_1}	0	0	0	0	0	1	-2	1	$\boxed{0}$
0	x_1	1	-1	-2/5	2/5	0	0	1	-2/5	4/5
0	x_5	0	1	-4/5	-1/5	1	0	0	1/5	3/5
		0	0	0	0	0	0	3	0	0

→ FILA REDUNDANTE (Se elimina)

→ Hay solución óptima y $x_a^* = 0$ (ninguna variable artificial aparece en la base)

• FASE II :

		1	2	-1	1	-2	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_1	1	-1	-2/5	2/5	0	4/5
-2	x_5	0	1	-4/5	-1/5	1	3/5
		0	5	-11/5	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$

→ SOLUCIÓN ÓPTIMA NO ACOTADA

⊢ El problema posee solución óptima no acotada //

3. Método de las penalizaciones

METODO DE LAS PENALIZACIONES:

Sea el PPL $P: \begin{cases} \text{Min } c^T x \\ Ax = b \\ x \geqslant 0 \quad (b \geqslant 0) \end{cases}$ y sea el PPL $P': \begin{cases} \text{Min}\{c^T x + M \cdot x_a\} \\ Ax + I x_a = b \\ x, x_a \geqslant 0 \end{cases}$

$x_a \equiv$ VARIABLES ARTIFICIALES, $M >> 0$ Arbitrariamente grande. (penalización)

PROPOSICION:

Sea (x^*, x_a^*) la solución óptima de P'. Entonces:

x^* es solución de $P \Leftrightarrow x_a^* = 0$

– Demostración:

$\Leftarrow$) Si $x_a^* = 0$, entonces: $\overbrace{Ax^* = b}^{Ax^* + I\overset{0}{\widehat{x_a^*}} = b}$, $x^* \geqslant 0$, luego: x^* es solución de P //

$\Rightarrow$) Si $x_a^* \neq 0$ (como es solución $(x_a^* \geqslant 0)$, existe $x_{a_i}^* > 0$) $\Rightarrow \nexists$ solución factible de P,

pues, si existiera $x^\circ \geqslant 0 \,/\, Ax^\circ = b \Rightarrow \overbrace{c^T \cdot x^\circ + M \cdot 0}^{c^T \cdot x^\circ \text{ ó bien}} < c^T x^* + M x_a^*$ ¡!

pues (x^*, x_a^*) es solución óptima de P' y $(x_\circ, 0)$ sería, entonces, mejor solución que la óptima. //

Ejemplo 1

- EJEMPLO:

$$P: \begin{cases} \text{Min}\{x_1 + x_2\} \text{ sujeto a} \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad P': \begin{cases} \text{Min}\{x_1 + x_2 + Mx_{a1} + Mx_{a2}\} \text{ sujeto a} \\ x_1 + x_2 - x_{s1} + x_{a1} = 1 \\ x_1 - x_2 - x_{s2} + x_{a2} = 1 \\ x_1, x_2, x_{s1}, x_{s2}, x_{a1}, x_{a2} \geq 0 \end{cases} ; \; M >> 0$$

- Aplicamos el Algoritmo del Simplex mediante las correspondientes tablas del Simplex para el problema P':

$$\begin{array}{cc|cccccc|c} & & 1 & 1 & 0 & 0 & M & M & \\ & & x_1 & x_2 & x_{s1} & x_{s2} & x_{a1} & x_{a2} & \\ \hline M & x_{a1} & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ M & x_{a2} & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & & 1-2M & 1 & M & M & 0 & 0 & 2M \\ \hline & & <0 & >0 & >0 & >0 & & & \end{array} \quad \rightsquigarrow B = \{a_{a1}, a_{a2}\}$$

Ejemplo 1

en la nueva base entra a_1 y puede salir a_{a1} ó a_{a2}, da lo mismo. Elegimos que salga el a_{a1}:

		1	1	0	0	M	M	
		x_1	x_2	x_{s1}	x_{s2}	x_{a1}	x_{a2}	
1	x_1	1	1	-1	0	1	0	1
M	x_{a2}	0	-2	1	-1	-1	1	0
		0	2M	1−M	M	−1+2M	0	1
			>0	<0	>0	>0		

$\rightsquigarrow B' = \{a_1, a_{a2}\}$

en la nueva base entra a_{s1} y sale a_{a2} (el cociente es: $\frac{0}{1} = 0$ $\rightsquigarrow$ Solución básica factible DEGENERADA):

		1	1	0	0	M	M	
		x_1	x_2	x_{s1}	x_{s2}	x_{a1}	x_{a2}	
1	x_1	1	-1	0	-1	0	1	1
0	x_{s1}	0	-2	1	-1	-1	1	0
		0	2	0	1	M	M−1	1
			>0		>0	>0	>0	

$\rightsquigarrow B'' = \{a_1, a_{s1}\}$

• SOLUCIÓN ÓPTIMA : $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} x^* \rightsquigarrow x_1 = 1 \text{ y } x_2 = 0 \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} x_a^* \end{matrix}$

luego, obtenemos solución óptima para P' tal que: $x_{a_1} = x_{a_2} = 0$, luego, por la PROPOSICION: también es solución óptima de P. //

Ejemplo 2

$$\text{Min}\{x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5\} \text{ \underline{sujeta a}:}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 = 1 \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_5 - x_6 \geq 2 \\ x_1 - x_2 + x_4 - x_5 \leq 2 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Aplicamos el MÉTODO DE LAS PENALIZACIONES:

$$\text{Min}\{x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 + 0x_6 + 0x_{s1} + 0x_{s2} + Mx_{a_1} + Mx_{a_2}\} \quad , M >> 0$$

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 + x_{a_1} = 1 \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 + 0x_4 + 2x_5 - x_6 - x_{s1} + x_{a_2} = 2 \\ x_1 - x_2 + 0x_3 + x_4 - x_5 + x_{s2} = 2 \\ x_i, x_{a_i}, x_{s_i} \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2

		1	−5	3	−1	2	0	0	0	M	M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_{s1}	x_{s2}	x_{a1}	x_{a2}	
M	x_{a1}	1	0	−1	2	1	3	0	0	1	0	1
M	x_{a2}	−2	−2	−1	0	2	−1	−1	0	0	1	2
0	x_{s2}	1	−1	0	1	−1	0	0	1	0	0	2
		$1+M$	$-5+2M$	$3+2M$	$-1-2M$	$2-3M$	$-2M$	M	0	0	0	$3M$

		1	−5	3	−1	2	0	0	0	M	M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_{s1}	x_{s2}	x_{a1}	x_{a2}	
2	x_5	1	0	−1	2	1	3	0	0	1	0	1
M	x_{a2}	−4	−2	1	−4	0	−7	−1	0	−2	1	0
0	x_{s2}	2	−1	−1	3	0	3	0	1	1	0	3
		$-1+4M$	$-5+2M$	$5-M$	$-5+4M$	0	$-6+7M$	M	0	$-2+3M$	0	2

Ejemplo 2

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_{s1}	x_{s2}	x_{a1}	x_{a2}	
		1	-5	3	-1	2	0	0	0	M	M	
2	x_5	-3	-2	0	-2	1	-4	-1	0	-1	1	1
3	x_3	-4	-2	1	-4	0	-7	-1	0	-2	1	0
0	x_{s2}	-2	-3	0	-1	0	-4	-1	1	-1	1	3
		19	5	0	15	0	29	5	0	8+M	-5+M	2

- Solución óptima única:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 1 \\ x_6 = 0 \\ x_{s1} = 0 \\ x_{s2} = 3 \end{pmatrix} //$$

Ejemplo 3

$$\text{Max}\{-4x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4\} \text{ \underline{sujeto a}}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_3 - x_4 = 11 \\ x_1 \text{ \underline{cualquiera}} \quad (x_1 = x^+ - x^-;\ x^+, x^- \geq 0) \\ x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

<u>Aplicamos</u> <u>el</u> <u>METODO DE LAS PENALIZACIONES</u> :

$$\text{Min}\{4x^+ - 4x^- - x_2 - 3x_3 + x_4 + Mx_{a_1} + Mx_{a_2} + Mx_{a_3}\}, \quad M >> 0$$

$$\begin{cases} -x^+ + x^- - 2x_2 - 0\cdot x_3 - x_4 + x_{a_1} = 1 \\ 0\cdot x^+ - 0\cdot x^- + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_{a_2} = 1 \\ -2x^+ + 2x^- + 0x_2 + x_3 - x_4 + x_{a_3} = 11 \\ x^+, x^-, x_2, x_3, x_4, x_{a_1}, x_{a_2}, x_{a_3} \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 3

		4	-4	-1	-3	1	M	M	M	
		x^+	x^-	x_2	x_3	x_4	x_{a_1}	x_{a_2}	x_{a_3}	
M	x_{a_1}	-1	1	-2	0	-1	1	0	0	1
M	x_{a_2}	0	0	1	-1	2	0	1	0	1
M	x_{a_3}	-2	2	0	1	-1	0	0	1	11
		4+3M	-4-3M	-1+M	-3	1	0	0	0	13M

		4	-4	-1	-3	1	M	M	M	
		x^+	x^-	x_2	x_3	x_4	x_{a_1}	x_{a_2}	x_{a_3}	
-4	x^-	-1	1	-2	0	-1	1	0	0	1
M	x_{a_2}	0	0	1	-1	2	0	1	0	1
M	x_{a_3}	0	0	4	1	1	-2	0	1	9
		0	0	-9-5M	-3	-3-3M	4+3M	0	0	-4+10M

Ejemplo 3

		4	-4	-1	-3	1	M	M	M	
		x^+	x^-	x_2	x_3	x_4	x_{a_1}	x_{a_2}	x_{a_3}	
-4	x^-	-1	1	0	-2	3	1	2	0	3
-1	x_2	0	0	1	-1	2	0	1	0	1
M	x_{a_3}	0	0	0	5	-7	-2	-4	1	5
		0	0	0	$-12-5M$	$15+7M$	$4+3M$	$9+5M$	0	$-13+5M$

		4	-4	-1	-3	1	M	M	M	
		x^+	x^-	x_2	x_3	x_4	x_{a_1}	x_{a_2}	x_{a_3}	
-4	x^-	-1	1	0	0	$1/5$	$-1/5$	$2/5$	$2/5$	5
-1	x_2	0	0	1	0	$3/5$	$-2/5$	$1/5$	$1/5$	2
-3	x_3	0	0	0	1	$-7/5$	$-2/5$	$-4/5$	$1/5$	1
		0	0	0	0	$-9/5$	$-11/5+M$	$-\frac{3}{5}+M$	$\frac{12}{5}+M$	-25

Ejemplo 3

		4	-4	-1	-3	1	M	M	M	
		x^+	x^-	x_2	x_3	x_4	x_{a_1}	x_{a_2}	x_{a_3}	
-4	x^-	-1	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-1/15$	$1/3$	$1/3$	$13/3$
1	x_4	0	0	$5/3$	0	1	$-2/3$	$1/3$	$1/3$	$10/3$
-3	x_3	0	0	$7/3$	1	0	$-4/3$	$-1/3$	$2/3$	$17/3$
		0	0	3	0	0	M+…	M+…	M+…	-31

⇝ solución óptima única.

⊢ La solución óptima es: $x^* = \begin{bmatrix} x^+ = 0 \\ x^- = 13/3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 17/3 \\ x_4 = 10/3 \\ x_{a_i} = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 = -13/3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 17/3 \\ x_4 = 10/3 \end{bmatrix}$ //

Ejemplo 4

$$\text{Min}\,\{4x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 + x_6\} \text{ \underline{sujeto a}:}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 - 2x_6 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Aplicamos el METODO DE LAS PENALIZACIONES:

$$\text{Min}\,\{4x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 + x_6 + Mx_{a_1} + Mx_{a_2} + Mx_{a_3}\}, \quad M >> 0$$

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 + x_{a_1} = 2 \\ -2x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 + 2x_5 - 2x_6 + x_{a_2} = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 + 0x_6 + x_{a_3} = 1 \\ x_i, x_{a_i} \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 4

		4	-4	2	2	-2	1	M	M	M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_{a_1}	x_{a_2}	x_{a_3}	
M	x_{a_1}	1	0	-1	2	-3	1	1	0	0	2
M	x_{a_2}	-2	1	0	1	2	-2	0	1	0	3
M	x_{a_3}	1	-2	1	2	-1	0	0	0	1	1
		4	$-4+M$	2	$2-5M$	$-2+2M$	$1+M$	0	0	0	$6M$

		4	-4	2	2	-2	1	M	M	M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_{a_1}	x_{a_2}	x_{a_3}	
M	x_{a_1}	0	2	-2	0	-2	1	1	0	-1	1
M	x_{a_2}	$-5/2$	2	$-1/2$	0	$5/2$	-2	0	1	$-1/2$	$5/2$
2	x_4	$1/2$	-1	$1/2$	1	$-1/2$	0	0	0	$1/2$	$1/2$
		$3+\frac{5}{2}M$	$-2-4M$	$1+\frac{5}{2}M$	0	$-1-\frac{M}{2}$	$1+M$	0	0	$-1+\frac{5}{2}M$	$1+\frac{7}{2}M$

Ejemplo 4

		4	−4	2	2	−2	1	M	M	M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_{a_1}	x_{a_2}	x_{a_3}	
−4	x_2	0	1	−1	0	−1	1/2	1/2	0	−1/2	1/2
M	x_{a_2}	−5/2	0	3/2	0	9/2	−3	−1	1	1/2	3/2
2	x_4	1/2	0	−1/2	1	−3/2	1/2	1/2	0	0	1
		$3+\frac{5}{2}M$	0	$-1-\frac{3}{2}M$	0	$-3-\frac{9}{2}M$	$\frac{4}{2}+3M$	$1+2M$	0	$-2+\frac{M}{2}$	$\frac{3}{2}M$

		4	−4	2	2	−2	1	M	M	M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_{a_1}	x_{a_2}	x_{a_3}	
−4	x_2	$-\frac{5}{9}$	1	−2/3	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{7}{18}$	5/6
−2	x_5	$-\frac{5}{9}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
2	x_4	$-\frac{1}{3}$	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1/6	1/3	1/6	$\frac{3}{2}$
		4/3	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}+M$	$\frac{2}{3}+M$	$-\frac{5}{3}+M$	−1

$$\rightsquigarrow x_1^* = \begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 5/6 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 3/2 \\ x_5 = 1/3 \\ x_6 = 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4

		4	−4	2	2	−2	1	M	M	M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_{a_1}	x_{a_2}	x_{a_3}	
−4	x_2	$-\frac{5}{3}$	1	0	0	2	$-3/2$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	3/2
2	x_3	$-\frac{5}{3}$	0	1	0	3	−2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
2	x_4	$-\frac{1}{3}$	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	3/2
		4/3	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}+M$	$\frac{2}{3}+M$	$-\frac{5}{3}+M$	−1

$$\rightsquigarrow x_2^* = \begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 3/2 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 3/2 \\ x_5 = 0 \\ x_6 = 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$

		4	−4	2	2	−2	1	M	M	M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_{a_1}	x_{a_2}	x_{a_3}	
−4	x_2	$-\frac{5}{9}$	1	$-2/3$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{7}{18}$	5/6
−2	x_5	$-\frac{5}{9}$	0	1/3	0	1	$-2/3$	$-2/9$	2/9	1/9	1/3
2	x_4	$-\frac{1}{3}$	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	3/2
		4/3	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}+M$	$\frac{2}{3}+M$	$-\frac{5}{3}+M$	−1

$\rightsquigarrow$ misma tabla óptima.

- Conjunto de soluciones óptimas: $x^* = \lambda \cdot x_1^* + (1-\lambda)\cdot x_2^* \;,\; \lambda \in [0,1]$ //

4. Ejercicios propuestos

Ejercicio 1

Dado el siguiente problema de programación lineal:

Minimizar $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

sujeto a :
$2x_1 - x_2 + x_3 = 4$
$x_1 + 2x_3 - x_4 = 3$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$
x_4 cualquiera

Resolverlo utilizando el **método de las dos fases**.

Ejercicio 2

Dado el siguiente problema de programación lineal:

Minimizar $z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$

sujeto a :
$3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 5$
$x_1 + x_3 = 3$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Resolverlo utilizando el **método de las penalizaciones**.