Tema 5: Dualidad y sensibilidad de los modelos lineales.

Objetivos del tema:

- ☐ Introducir el concepto de Sensibilidad en la Programación Lineal
- ☐ Introducir el concepto de Dualidad en la Programación Lineal
- ☐ Aprender a formular el modelo del problema Dual asociado al Primal
- ☐ Establecer la relación entre las sensibilidades del problema Primal y las soluciones del Dual

Sensibilidad en la Programación Lineal

El **análisis de sensibilidad** para los modelos de Programación Lineal tiene por objetivo identificar el impacto sobre la solución del problema original tras determinadas modificaciones en los parámetros del problema, sin tener que resolver el problema nuevamente cada vez que se modifica uno de tales parámetro (como se verá más adelante, es suficiente con resolver el problema Dual).

- Sea ***B**** la base óptima de un problema de Programación Lineal en forma estándar, entonces: $$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}^{*} &= \left(\boldsymbol{B}^{*}\right)^{-1}\boldsymbol{b} \\ z^{*} &= \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}^{*} \end{aligned}$$
- Si ahora se considera un cambio marginal en el vector de términos independientes ***b***: $$\boldsymbol{b} \rightarrow \boldsymbol{b}^{*} + \Delta\boldsymbol{b}$$
- Dicho cambio dará lugar a cambios en la solución ($\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}$) y el valor de la función objetivo ($\boldsymbol{z}$): $$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}^{*} &\rightarrow \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}^{*} + \Delta\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} \\ z^{*} &\rightarrow z^{*} + \Delta z^{*} \end{aligned}$$
- Por tanto, y dado que se trata de un problema Lineal, se puede escribir: $$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} &= \left(\boldsymbol{B}^{*}\right)^{-1}\Delta\boldsymbol{b} \\ \Delta z &= \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{T}}\Delta\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} \end{aligned}$$
- Dado lugar a $$\Delta z = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{T}}\Delta\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{T}}\left(\boldsymbol{B}^{*}\right)^{-1}\Delta\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\lambda}^{*\boldsymbol{T}}\Delta\boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\lambda}^{*\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{T}}\left(\boldsymbol{B}^{*}\right)^{-1}}$$

Dicha ecuación, para una coordenada arbitraria *j* nos indica el cambio en el valor optimo de la función objetivo como resultado de un cambio marginal en la componente *j* del vector de términos independientes ***b***.

$$\Delta z = \boldsymbol{\lambda}^{*\boldsymbol{T}}\Delta\boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad \lambda_j^{*} = \frac{\Delta z}{\Delta b_j}$$

Estos parámetros de sensibilidad juegan un papel fundamental en aplicaciones de ingeniería y científicas. Como se verá en las secciones siguientes, los parámetros de sensibilidad son de hecho las variables del **Problema Dual**.

Ejemplo 1: Problema del carpintero

Un carpintero fabrica dos tipos de mesas de madera. Cada mesa del tipo 1 necesita 4 horas de mecanizado primario (preparación de piezas) y 4 horas de mecanizado secundario (ensamblado y barnizado). Análogamente, cada mesa del tipo 2 necesita 3 horas de mecanizado primario y 7 horas de mecanizado secundario. Las disponibilidades diarias de mecanizados primario y secundario son respectivamente de 40 y 56 horas-máquina. La venta de una mesa del tipo 1 reporta un beneficio de 70 euros, mientras que la venta de una mesa del tipo 2 de 90 euros.

	Tiempo de mecanizado (horas)		Disponibilidad diaria (horas-máquina)
Tipo de mesa	Tipo 1	Tipo 2	
Mecanizado primario	4	3	40
Mecanizado secundario	4	7	56
Beneficio (€)	70	90	

Se trata de determinar el número de mesas de cada tipo que han de producirse diariamente para maximizar el beneficio obtenido.

Solución: Problema del carpintero

Este problema puede formularse como el problema de Programación Lineal siguiente:

$$\begin{array}{ll} \textit{Maximizar} & z = 70x_1 + 90x_2 \\ \textit{sujeto a} & 4x_1 + 3x_2 \leq 40 \\ & 4x_1 + 7x_2 \leq 56 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Donde:

$x_1 = \textit{cantidad diaria de mesas a fabricar del tipo } 1$

$x_2 = \textit{cantidad diaria de mesas a fabricar del tipo } 2$

Solución: Problema del carpintero (continuación 1)

La solución óptima de este problema, como se observa en la figura, establece que han de producirse diariamente 7 y 4 sillas de los tipos 1 y 2 respectivamente, lo que da lugar a un beneficio de 850 euros.

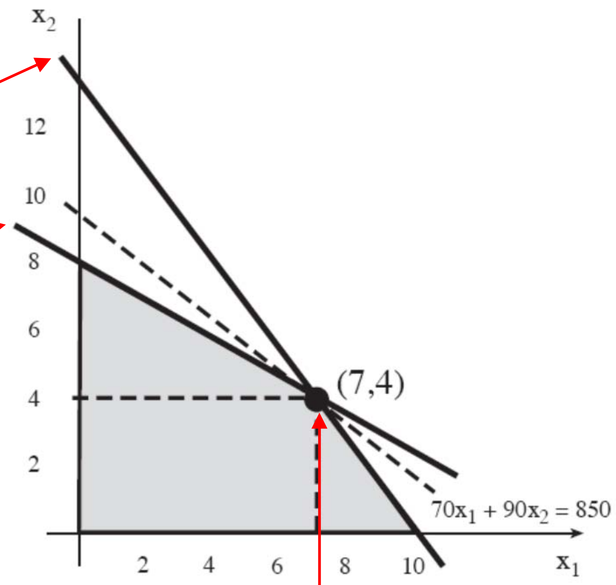
Este resultado indica que ambos recursos de mecanizado (primario y secundario) están plenamente utilizados porque las restricciones relacionadas con ellos están ambas activas.

```
//Variables de decisión
dvar float+ x1;
dvar float+ x2;

//Función objetivo
maximize 70*x1+90*x2;

//Restricciones
subject to {
   4*x1 + 3*x2 <= 40;
   4*x1 + 7*x2 <= 56;
}
```

```
Final solution with objective 850:
x1 = 7;
x2 = 4;
```



Solución: Problema del carpintero (continuación 2)

Supóngase ahora que la capacidad de mecanizado puede aumentarse cada día en 8 horas-máquina. En estas condiciones:

- ***¿Cómo afecta esta ampliación de capacidad a los beneficios diarios?***
- ***¿En qué tipo de mecanizado (primario o secundario) es preferible invertir estas 8 horas?***

Para responder a esta pregunta pueden calcularse las sensibilidades asociadas a cada una de las capacidades de mecanizado.

El problema con la nueva capacidad de ***mecanizado primario*** incrementada en 8 horas-máquina es:

$$\begin{aligned} &\textit{Maximizar} && z = 70x_1 + 90x_2 \\ &\textit{sujeto a} && 4x_1 + 3x_2 \leq 48 \\ & && 4x_1 + 7x_2 \leq 56 \\ & && x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

```
Final solution with objective 915:
x1 = 10.5;
x2 = 2;
```

Así, la solución óptima de este nuevo problema establece que han de producirse diariamente 10.5 sillas del tipo 1 y 2 sillas del tipo 2, dando lugar a un beneficio de 915 euros.

Esta solución indica que el beneficio diario crece en 65 euros cuando la capacidad de mecanizado primario lo hace en 8 horas-máquina.

Así, la **sensibilidad** o **precio sombra** de la capacidad de mecanizado primario es el ratio $\lambda_1^* = \frac{\Delta z}{\Delta b_1} = \frac{65}{8} = 8.125$ euros, que determina el crecimiento de la función objetivo al crecer la capacidad de mecanizado primario 1 hora.

El problema con la nueva capacidad de ***mecanizado secundario*** incrementada en 8 horas-máquina es:

$$\begin{aligned} &\textit{Maximizar} && z = 70x_1 + 90x_2 \\ &\textit{sujeto a} && 4x_1 + 3x_2 \leq 40 \\ & && 4x_1 + 7x_2 \leq 64 \\ & && x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

```
Final solution with objective 925:
x1 = 5.5;
x2 = 6;
```

Solución: Problema del carpintero (continuación 3)

Así, la solución óptima de este nuevo problema establece que han de producirse diariamente 5.5 sillas del tipo 1 y 6 sillas del tipo 2, dando lugar a un beneficio de 925 euros. Esta solución indica que el beneficio diario crece en 75 euros cuando la capacidad de mecanizado secundario lo hace en 8 horas-máquina.

Así, la **sensibilidad** o **precio sombra** de la capacidad de mecanizado secundario es el ratio $\lambda_2^* = \frac{\Delta z}{\Delta b_2} = \frac{75}{8} = 9.375$ euros, que determina el crecimiento de la función objetivo al crecer la capacidad de mecanizado secundario1 hora.

Nótese que dichas sensibilidades pueden obtenerse mediante la expresión:

$$\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 70 & 90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 8.125 & 9.375 \end{pmatrix}$$

En vista de los resultados, pueden extraerse las siguientes conclusiones:

- Incrementar la capacidad de mecanizado primario en 1 hora-máquina incrementa el beneficio en 8.125 euros al día.
- Incrementar la capacidad de mecanizado secundario en 1 hora-máquina incrementa el beneficio en 9.375 euros al día.
- Si se dispusiese de 8 horas-máquina adicionales de mecanizado sería preferible invertirlas en el mecanizado secundario.

Resumiendo:

- En general el precio sombra de una restricción proporciona el cambio en el valor de la función objetivo como resultado de un cambio unitario en el término independiente de la restricción, suponiendo que el resto de parámetros del problema permanecen inalterados.
- En muchos problemas de programación lineal los precios sombra son tan importantes como la solución del problema, ya que proporcionan información sobre el efecto en la función objetivo de cambios en los recursos disponibles.
- Como se verá en la siguiente sección, ***las sensibilidades o precios sombra pueden obtenerse simultáneamente resolviendo el problema Dual***.

Dualidad en la Programación Lineal (1)

Dado un problema de Programación Lineal, denominado **problema Primal**, existe otro problema de Programación Lineal, denominado **problema Dual**, íntimamente relacionado con él. Se dice que ambos problemas son mutuamente duales.

Bajo ciertas hipótesis, los problemas Primal y Dual dan lugar al mismo valor óptimo de la función objetivo, y por tanto se puede resolver indirectamente el problema Primal resolviendo el problema Dual. Esto puede suponer una ventaja computacional relevante.

Problema Dual

Dado el siguiente problema de Programación Lineal (**problema Primal**), su **problema Dual** es:

Problema Primal

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimizar} & z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \textit{sujeto a} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

⇨

Problema Dual

$$\begin{array}{ll} \textit{Maximizar} & z = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \\ \textit{sujeto a} & \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

donde $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_m)^T$ se denominan variables duales.

Obsérvese que los mismos elementos (la matriz $\boldsymbol{A}$ y los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$) configuran ambos problemas.

El problema primal no se ha escrito en forma estándar, sino en una forma que nos permite apreciar la simetría entre ambos problemas, y mostrar que el dual del dual es el primal. Para ello, escribiendo el dual como un problema de minimización, se tiene que:

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimizar} & z = -\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \\ \textit{sujeto a} & -\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

cuyo problema Dual

$$\begin{array}{ll} \textit{Maximizar} & z = -\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \textit{sujeto a} & -\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

es el Primal:

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimizar} & z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \textit{sujeto a} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

Dualidad en la Programación Lineal (2)

Como puede observarse:

- Cada restricción del problema Primal tiene asociada una variable del problema Dual
- Los coeficientes de la función objetivo del problema Primal son los términos independientes de las restricciones del problema Dual y viceversa
- La matriz de restricciones del problema Dual es la traspuesta de la matriz de restricciones del problema Primal.
- Si el problema Primal es de minimización, el Dual de maximización y viceversa.

Problema Dual del Primal en forma estándar

Dado el siguiente problema de Programación Lineal en la forma estándar:

$$\begin{aligned} &\mathit{Minimizar} && z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ &\mathit{sujeto\ a} && \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & && \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

ó

$$\begin{aligned} &\mathit{Minimizar} && z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ &\mathit{sujeto\ a} && \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{A} \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{b} \end{pmatrix} \\ & && \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

su Dual es:

$$\begin{aligned} &\mathit{Maximizar} && z = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}^{(1)} - \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}^{(2)} = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \\ &\mathit{sujeto\ a} && \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T & -\boldsymbol{A}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}^{(1)} \\ \boldsymbol{y}^{(2)} \end{pmatrix} \leq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

Obtención del problema Dual a partir del Primal

La tabla siguiente muestra las reglas para obtener el problema Dual de cualquier problema de Programación Lineal:

	Primal (Dual)	***Dual (Primal)***
Regla 1	Minimizar	Maximizar
Regla 2	Una variable ≥ 0	Una restricción de desigualdad ≤
Regla 3	Una variable ≤ 0	Una restricción de desigualdad ≥
Regla 4	Una variable no restringida en signo	Una restricción de igualdad
Regla 5	Una restricción de desigualdad ≤	Una variable ≤ 0
Regla 6	Una restricción de desigualdad ≥	Una variable ≥ 0
Regla 7	Una restricción de igualdad	Una variable no restringida en signo

Ejemplo 2: Obtención del problema Dual a partil del Primal

Dado el siguiente problema de Programación Lineal:

$$\begin{array}{llcl} Minimizar & z = x_1 + x_2 - x_3 & & \\ sujeto\ a & 2x_1 + \ x_2 \qquad\quad & \geq & 3 \\ & \ x_1 \qquad\quad - \ x_3 & = & 2 \\ & \qquad\qquad\quad x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Se trata de obtener su problema Dual.

Solución: Obtención del problema Dual a partil del Primal

Para obtenerlo se aplican las reglas anteriores de la forma siguiente:

- ***Regla 1***. Puesto que el problema Primal es de minimización, el Dual es de maximización.
  Además, dado que el problema Primal tiene 2 restricciones, el Dual tiene dos variables ($\boldsymbol{y}_1$ e $\boldsymbol{y}_2$). Los coeficientes que multiplican a dichas variables en la función objetivo del Dual son los términos independientes de las restricciones del Primal.
  Así, la función objetivo del Dual resulta ser:

  $$Maximizar \quad z = 3y_1 + 2y_2$$

- **Regla 6**. La primera restricción (≥) del problema Primal hace que la primera variable dual sea no negativa.

  $$y_1 \quad \geq \quad 0$$

- **Regla 7**. La segunda restricción (=) del problema Primal hace que la segunda variable dual no esté restringida en signo.

Solución: Obtención del problema Dual a partil del Primal (continuación)

- ***Regla 4***. Puesto que las dos primeras variables del problema Primal no están restringidas en signo, las dos primeras restricciones del Dual son de igualdad. Los coeficientes que multiplican a las variables duales en dichas restricciones son los de la matriz ***A*** traspuesta, y los términos independientes son los coeficientes de las dos primeras variables primales en la función objetivo del problema Primal.

$$\begin{array}{rcl} 2y_1 + \ y_2 & = & 1 \\ y_1 \qquad & = & 1 \end{array}$$

- ***Regla 2***. Puesto que la tercera variable del problema Primal es no negativa, la tercera restricción del Dual es de desigualdad (≤). Al igual que con las restricciones anteriores los coeficientes que multiplican a las variables duales en dicha restricción son los de la matriz ***A*** traspuesta, y el término independiente es el coeficiente de la tercera variable primal en la función objetivo del problema Primal.

$$-y_2 \quad \leq \quad -1$$

- ***Problema dual***: Reuniendo todo lo anterior, el problema Dual resulta ser:

$$\begin{array}{ll} \textit{Maximizar} & z = 3y_1 + 2y_2 \\ \textit{sujeto a} & \begin{array}{rcr} 2y_1 + \ y_2 & = & 1 \\ y_1 \qquad & = & 1 \\ -y_2 & \leq & -1 \end{array} \end{array}$$

Se deja como ejercicio la aplicación de dichas reglas para demostrar que el Dual del Dual es el Primal.

Teoremas de dualidad:

La importancia del problema dual se establece en los siguientes teoremas:

Lema de dualidad débil:

Sea $\boldsymbol{x}$ una solución factible de un problema de Programación Lineal e $\boldsymbol{y}$ una solución factible de su problema Dual.
Entonces:

$$\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$

Corolario:

Si $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*$ para dos vectores $\boldsymbol{x}^*$ e $\boldsymbol{y}^*$, factibles en los problemas Primal y Dual respectivamente, entonces se satisface:

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}^* \le \max_{y} \left\{ \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \middle| \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{c} \right\} \le \min_{x} \left\{ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \middle| \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \right\} \le \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}^*$$

Por tanto, todas las desigualdades son de hecho igualdades y $\boldsymbol{x}^*$ e $\boldsymbol{y}^*$ deben ser soluciones óptimas de los problemas Primal y Dual respectivamente, tal como establecía la hipótesis inicial. El teorema de dualidad fuerte establece que los problemas Primal y Dual tienen, en general, soluciones óptimas simultáneamente.

Teorema de dualidad:

Si $\boldsymbol{x}^*$ es una solución óptima del problema Primal, existe una solución óptima $\boldsymbol{y}^*$ para el Dual, y el mínimo del Primal y el máximo del Dual presentan el mismo valor de la función objetivo $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*$. Recíprocamente, si $\boldsymbol{y}^*$ es una solución óptima del Dual, existe una solución óptima del Primal, $\boldsymbol{x}^*$, y nuevamente los valores mínimo y máximo del Primal y Dual dan lugar a un valor común de la función objetivo $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*$. En otro caso, o un conjunto factible esta vacío o lo están los dos.

En resumen, dado un problema de Programación Lineal y su Dual, una de las siguientes afirmaciones es cierta:

- Ambos problemas tienen solución óptima y los valores óptimos de las funciones objetivo respectivas coinciden.
- Uno de los problemas no está acotado y el otro tiene una región factible vacía.

Ejemplo 3: Problema del carpintero Dual

Dado el problema del carpintero del Ejemplo 3 cuya formulación del problema Primal resultó ser:

$$\begin{array}{ll} Maximizar & z = 70x_1 + 90x_2 \\ sujeto\ a & 4x_1 + 3x_2 \leq 40 \\ & 4x_1 + 7x_2 \leq 56 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & cantidad\ diaria\ de\ mesas\ a\ fabricar\ del\ tipo\ 1 \\ x_2 & = & cantidad\ diaria\ de\ mesas\ a\ fabricar\ del\ tipo\ 2 \end{array}$$

Y cuya solución resultó se de z=850 euros para x_1=4 y x_2=8.

Se trata de obtener y resolver el problema dual.

Solución: Problema del carpintero Dual

Para obtenerlo se aplican las reglas anteriores de la forma siguiente:

- ***Regla 1***. Puesto que el problema Primal es de maximización, el Dual es de minimización.
  Además, dado que el problema Primal tiene 2 restricciones, el Dual tiene dos variables ($\boldsymbol{y}_1$ e $\boldsymbol{y}_2$). Los coeficientes que multiplican a dichas variables en la función objetivo del Dual son los términos independientes de las restricciones del Primal.
  Así, la función objetivo del Dual resulta ser:

$$Minimizar \quad z = 40y_1 + 56y_2$$

- **Regla 2**. Las dos restricciones (≤) del problema Primal hacen que las dos variables duales sean no negativas.

$$y_1, y_2 \quad \geq \quad 0$$

Solución: Problema del carpintero Dual (continuación 1)

- ***Regla 6***. Puesto que las dos variables del problema Primal son no negativa, las dos restricciones del Dual son de desigualdad (≥). Además, los coeficientes que multiplican a las variables duales en dicha restricción son los de la matriz ***A*** traspuesta, y los términos independientes son los coeficientes que multiplican a las variables primales en la función objetivo del problema Primal.

$$\begin{array}{rcl} 4y_1+4y_2 & \geq & 70 \\ 3y_1+7y_2 & \geq & 90 \end{array}$$

- ***Problema dual***: Reuniendo todo lo anterior, el problema Dual resulta ser:

$$\begin{array}{lrcl} Minimizar & z=40y_1+56y_2 & & \\ sujeto\ a & 4y_1+4y_2 & \geq & 70 \\ & 3y_1+7y_2 & \geq & 90 \\ & y_1,y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Resolviendo dicho problema mediante OPL, se obtiene:

```
//Variables de decisión
dvar float+ y1;
dvar float+ y2;

//Función objetivo
maximize 40*y1+56*y2;

//Restricciones
subject to {
   4*y1 + 4*y2 >= 70;
   3*y1 + 7*y2 >= 90;
}
```

```
Final solution with objective 850:
y1 = 8.125;
y2 = 9.375;
```

Que cómo puede comprobarse coinciden con las sensibilidades calculadas en el Ejemplo1. Además:

$$\boldsymbol{x}^T=\boldsymbol{c}^T\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}40 & 56\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 4\\ 3 & 7\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}7 & 4\end{pmatrix}$$

Solución: Problema del carpintero Dual (continuación 3)

El problema Dual puede interpretarse de la siguiente manera:

- Dado que las soluciones del problema Dual coinciden con las sensibilidades del Primal, las variables $\boldsymbol{y}_1$ e $\boldsymbol{y}_2$ del problema Dual corresponden al incremento en el beneficio obtenido al vender mesas al incrementar en una hora de la capacidad de mecanizado primario y secundario respectivamente.

- Así, dichas sensibilidades pueden verse cómo el precio a la hora al que deberían venderse las capacidades de mecanizado si se quiere obtener al menos el mismo nivel de beneficios vendiendo tiempo de mecanizado que haciendo mesas. En esta situación las variables Duales pueden interpretarse de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lcl} y_1 & = & \textit{precio de venta de una hora de capacidad de mecanizado primario} \\ y_2 & = & \textit{precio de venta de una hora de capacidad de mecanizado secundario} \end{array}$$

- Para preservar la competitividad del negocio, se ha de ofrecer el mínimo precio de venta de las capacidades de mecanizado primario y secundario diarias, esto es minimizar la función $40\boldsymbol{y}_1 + 56\boldsymbol{y}_2$, donde 40 y 56 representan respectivamente la disponibilidad diaria en horas de mecanizado primario y secundario respectivamente:

$$\textit{Minimizar} \quad z = 40y_1 + 56y_2$$

- Por otro lado, si se desea obtener al menos el mismo beneficio vendiendo horas de mecanizado que vendiendo mesas, el beneficio que se obtiene por la venta de las horas de mecanizado primario y secundario para producir una mesa de cada tipo no debe ser inferior al beneficio que se obtiene por venta de la misma:

$$\begin{array}{lcl} 4y_1 + 4y_2 & \geq & 70 \\ 3y_1 + 7y_2 & \geq & 90 \end{array}$$

- Si añadimos que los precios de venta son cantidades no negativas, se obtiene de nuevo el problema Dual:

$$y_1, y_2 \quad \geq \quad 0$$

⇒

$$\begin{array}{llcl} \textit{Minimizar} & z = 40y_1 + 56y_2 & & \\ \textit{sujeto a} & 4y_1 + 4y_2 & \geq & 70 \\ & 3y_1 + 7y_2 & \geq & 90 \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Solución: Problema del carpintero Dual (continuación 2)

Una segunda interpretación del problema Dual es la siguiente:

- Supóngase que el carpintero desea contratar un segura contra las pérdidas de capacidad de mecanizado primario y secundario. En estas circunstancias, se trata de determinar el precio al que dicho seguro deberá pagar al carpintero cada hora de mecanizado primario y secundario perdida.

- Así, las variables de decisión del problema Dual serían en este caso:

$$\begin{aligned} y_1 &= \textit{indemnización del seguro por cada hora de capacidad de mecanizado primario perdida} \\ y_2 &= \textit{indemnización del seguro por cada hora de capacidad de mecanizado secundario perdida} \end{aligned}$$

- Ahora, el seguro tratará de minimizar la cantidad total a pagar al carpintero en caso de indemnización, esto es minimizar la función $40\boldsymbol{y}_1 + 56\boldsymbol{y}_2$, donde 40 y 56 representan respectivamente la disponibilidad diaria en horas de mecanizado primario y secundario respectivamente:

$$\textit{Minimizar} \quad z = 40y_1 + 56y_2$$

- Por otro lado, el carpintero tratará de fijar unas condiciones a la compañía de seguros según las cuales la indemnización del seguro por lo menos cubra las pérdidas equivalentes a los ingresos netos que se tendrían por la fabricación de cada uno de los dos tipos de mesas:

$$\begin{aligned} 4y_1 + 4y_2 &\geq 70 \\ 3y_1 + 7y_2 &\geq 90 \end{aligned}$$

- Si añadimos que las indemnizaciones del seguro son cantidades no negativas, se obtiene de nuevo el problema Dual:

$$y_1, y_2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} \textit{Minimizar} \quad & z = 40y_1 + 56y_2 \\ \textit{sujeto a} \quad & 4y_1 + 4y_2 \geq 70 \\ & 3y_1 + 7y_2 \geq 90 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 1:

Se ha concedido permiso a un nuevo tour operador para realizar vuelos entre Madrid y las islas Baleares e interinsulares. Para ello, debe comprar turborreactores con los que cubrir los vuelos entre Madrid y las islas, así como aviones de hélice y/o helicópteros con los que servir los vuelos interinsulares. Las características de los aparatos que puede comprar el operador se resumen en la siguiente tabla:

Tipo de aparato	Coste (x10^6€)	Mantenimiento diario (€)	Pilotos	Copilotos	Azafatas	Capacidad mensual
Turborreactor	6	1200	2		2	4000
Avión de hélice	2	600	1	1	1	300
Helicóptero	1	300	1			100

Además, se dispone de la siguiente información:

- La compañía desea operar con coste de mantenimiento mínimo.
- El presupuesto de compra es de 35 millones de euros.
- El permiso concedido requiere que el número mínimo de aparatos sea 15.
- Se pueden contratar hasta 20 pilotos y 16 azafatas, y se desea emplear al menos a 3 copilotos.
- El tráfico entre Baleares y Madrid se estima en a menos 8000 pasajeros al mes y el interinsular en 500 pasajeros al mes.

En estas condiciones, se pide:

a) Formular un modelo de programación lineal que proporcione el plan óptimo de compra.

b) Resolverlo e interpretar la solución (pueden analizarse las variables de holgura del problema planteado en forma estándar, $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$).

c) Un cambio en el contrato reduce el número mínimo de aparatos a 14. Analizar el efecto económico de esta modificación resolviendo nuevamente el problema Primal e interpretando la solución del Dual.

d) ¿Qué otros parámetros del problema producen una modificación en la función de coste?, ¿en qué cantidad y por qué?

e) Suponiendo que el contrato no impone ninguna restricción sobre el mínimo número de aparatos, ¿cuál es dicho número?

Ejercicio 2:

Un fabricante de tejidos posee una máquina que utiliza para la fabricación de diversos artículos. Para dos de ellos, denominados A y B, la máquina está disponible durante 170 horas al mes. La cadencia de fabricación del artículo A es de 50 por hora, y la del B de 80 por hora. Cada unidad de A proporciona un beneficio por venta de 30 euros y cada unidad de B 20 euros. Además, la capacidad de absorción del mercado es limitada, y a lo sumo debemos fabricar cada mes 7000 artículos de A y 10000 de B.

	Artículo A	Artículo B	Disponibilidad mensual (horas)
Cadencia a la hora (nº artículos)	50	80	170
Max. nº de art. a fabricar mensualmente	7000	10000	
Beneficio (€)	30	20	

El fabricante muestra el deseo de maximizar el beneficio total. Para ello:

a) Formular un programa lineal que dé respuesta a los deseos del fabricante.

b) Resolverlo e interpretar su solución.

c) Formular y resolver su problema dual.

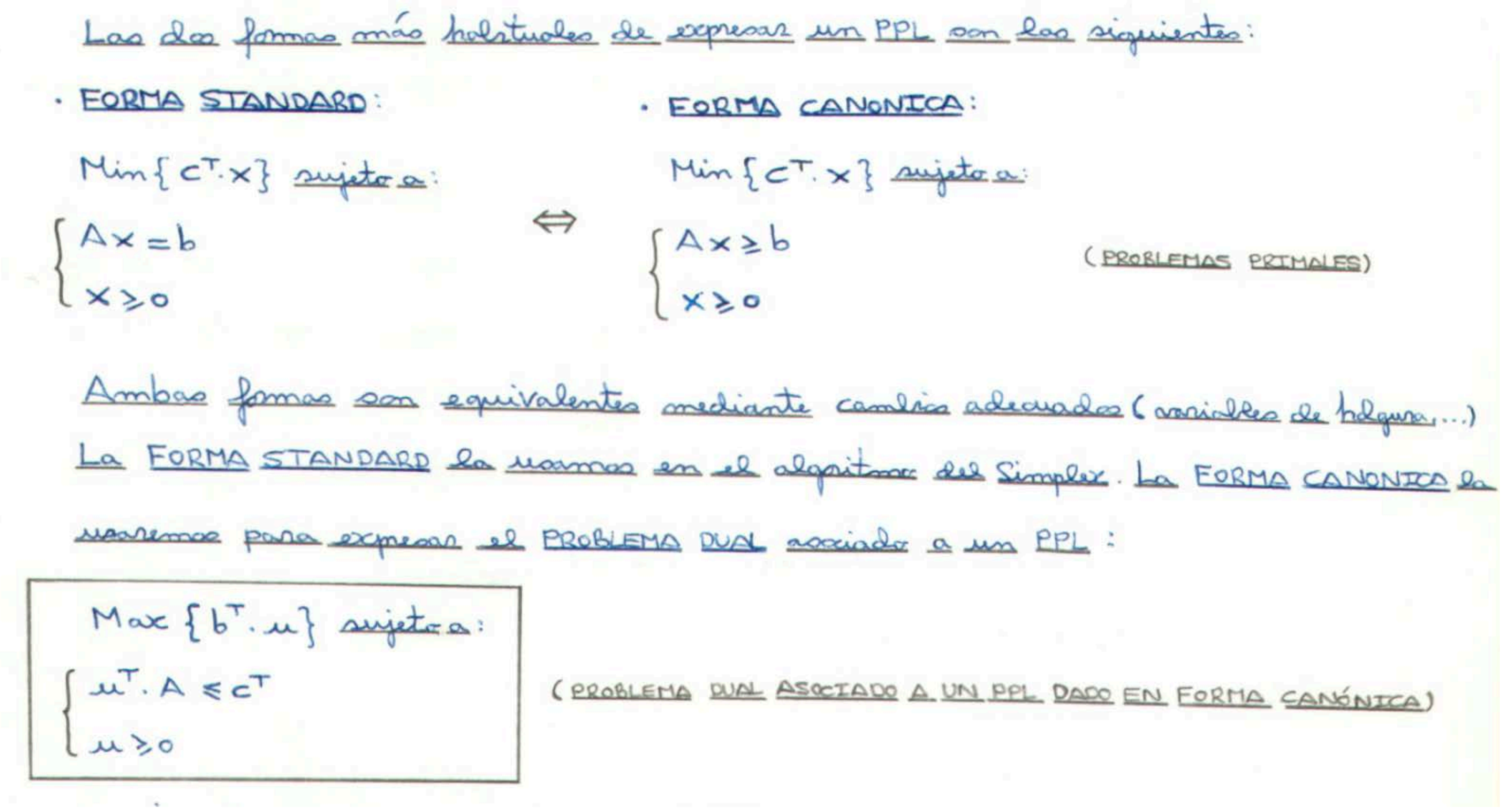
UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Rafael del Vado Vírseda
rdelvado@sip.ucm.es

APÉNDICE DEL TEMA 5

EJEMPLOS

1. Problema Dual y Formulaciones Equivalentes



Las dos formas más habituales de expresar un PPL son los siguientes:

- **FORMA STANDARD:**

Min$\{c^T \cdot x\}$ sujeto a:

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

- **FORMA CANONICA:**

Min$\{c^T \cdot x\}$ sujeto a:

$$\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

(PROBLEMAS PRIMALES)

Ambas formas son equivalentes mediante cambios adecuados (variables de holgura,...)

La FORMA STANDARD la usamos en el algoritmo del Simplex. La FORMA CANONICA la usaremos para expresar el PROBLEMA DUAL asociado a un PPL:

Max$\{b^T \cdot u\}$ sujeto a:

$$\begin{cases} u^T \cdot A \leq c^T \\ u \geq 0 \end{cases}$$

(PROBLEMA DUAL ASOCIADO A UN PPL DADO EN FORMA CANÓNICA)

Ejemplo 1

$\text{Min}\{2x_1 + 3x_2 - x_3\}$ sujeto a:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geqslant 8 \\ 15x_1 - 24x_2 + 7x_3 \geqslant 9 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Su PROBLEMA DUAL sería:

$\text{Max}\{8u_1 + 9u_2\}$ sujeto a:

$$\begin{cases} (u_1, u_2)\begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 15 & -24 & 7 \end{pmatrix} \leqslant (2, 3, -1) \\ u_1, u_2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\text{Max}\{8u_1 + 9u_2\}$ sujeto a:

$$\begin{cases} 7u_1 + 15u_2 \leqslant 2 \\ 2u_1 - 24u_2 \leqslant 3 \\ 5u_1 + 7u_2 \leqslant -1 \\ u_1, u_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2

$$\text{Min}\left\{2x_1 + 3x_2 - x_3 + 0\cdot x_{s1} + 0\cdot x_{s2}\right\} \text{ sujeto a:}$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_{s1} = 8 \\ 15x_1 - 24x_2 + 7x_3 - x_{s2} = 9 \\ x_i \geq 0 \,,\; x_{s1}, x_{s2} \geq 0 \end{cases}$$

Su PROBLEMA DUAL sería:

$$\text{Max}\left\{8u_1 + 9u_2\right\} \text{ sujeto a:}$$

$$\begin{cases} (u_1, u_2)\cdot\begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 & -1 \\ 15 & -24 & 7 & -1 \end{pmatrix} \leq (2,3,-1,0,0) \\ u_1, u_2 \text{ cualesquiera.} \end{cases}$$

$$\text{Max}\left\{8u_1 + 9u_2\right\} \text{ sujeto a:}$$

$$\begin{cases} 7u_1 + 15u_2 \leq 2 \\ 2u_1 - 24u_2 \leq 3 \\ 5u_1 + 7u_2 \leq -1 \\ -u_1 \leq 0 \\ -u_2 \leq 0 \\ u_1, u_2 \text{ cualesquiera.} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \text{Max}\left\{8u_1 + 9u_2\right\} \text{ sujeto a: } \begin{cases} 7u_1 + 15u_2 \leq 2 \\ 2u_1 - 24u_2 \leq 3 \\ 5u_1 + 7u_2 \leq -1 \\ u_1, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 3

Mín $\{2x_1 + 3x_2 - x_3\}$ sujeto a:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_i \geqslant 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

Mín $\{2x_1 + 3x_2 - x_3\}$ sujeto a:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 \geqslant -1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 \geqslant 2 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant -2 \\ x_i \geqslant 0 \end{cases}$$

$\updownarrow$ DUAL

$\updownarrow$ DUAL

Max $\{u_1 + 2u_2\}$ sujeto a:

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 \leqslant 2 \\ u_1 - u_2 \leqslant 3 \\ u_1 - 2u_2 \leqslant -1 \\ u_1, u_2 \text{ cualesquiera} \end{cases}$$

$u_1 = v_1 - v_2$

$u_2 = v_3 - v_4$

$\downarrow$

$\Longleftrightarrow$

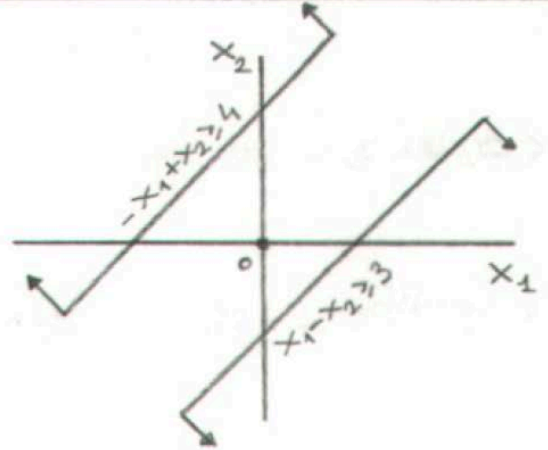
Max $\{v_1 - v_2 + 2v_3 - 2v_4\}$ sujeto a:

$$\begin{cases} v_1 - v_2 + 2v_3 - 2v_4 \leqslant 2 \\ v_1 - v_2 - v_3 + v_4 \leqslant 3 \\ v_1 - v_2 - 2v_3 + 2v_4 \leqslant -1 \\ v_1, v_2, v_3, v_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

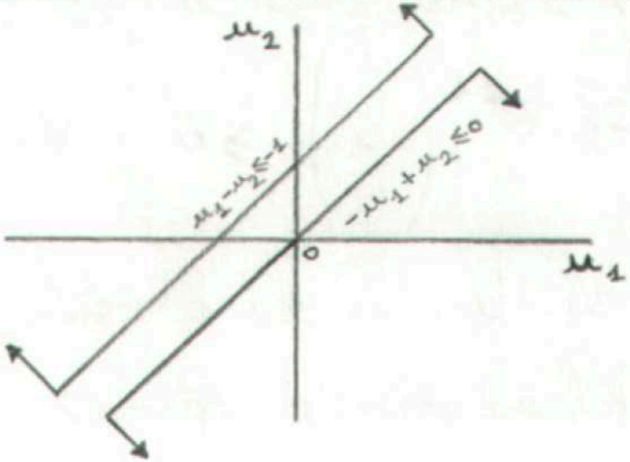
Ejemplo 4

Si el problema P tiene solución óptima no acotada, entonces su dual P* no tiene solución factible. Su recíproco, sin embargo, no es cierto:

$$P:\begin{cases}\min\{-x_1\}\\ x_1-x_2\geq 3\\ -x_1+x_2\geq 4\\ x_1,x_2\geq 0\end{cases}\quad\xleftrightarrow{\text{DUAL}}\quad P^*:\begin{cases}\text{Max}\{3u_1+4u_2\}\\ u_1-u_2\leq -1\\ -u_1+u_2\leq 0\\ u_1,u_2\geq 0\end{cases}$$



P no posee solución factible



P* no posee solución factible

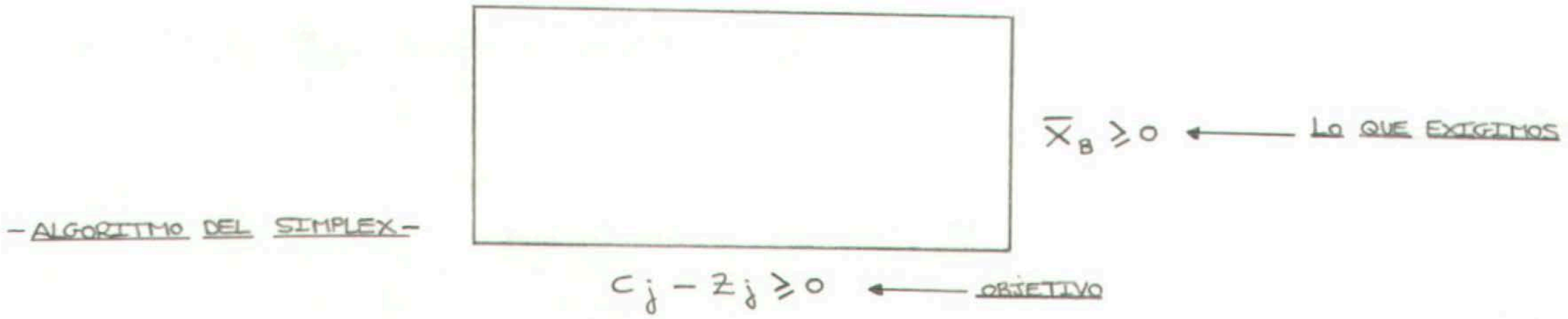
2. Algoritmo Dual

Consideramos dos problemas duales:

$$P : \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad y \quad P^* : \begin{cases} \max b^T u \\ u^T A \leq c^T \\ u \text{ cualquiera} \end{cases} \quad (\text{Dual de P})$$

Para resolver el problema P:

- Con el ALGORITMO DEL SIMPLEX partíamos inicialmente de una solución que exigíamos que fuera ≥ 0 y el objetivo que perseguíamos era conseguir que $c_j - z_j \geq 0$



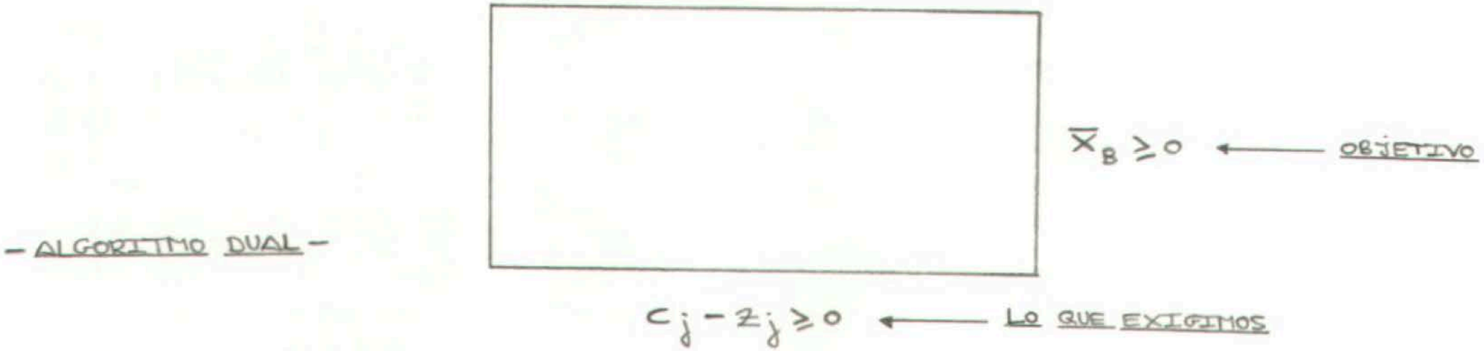
$\overline{X}_B \geq 0$ ← LO QUE EXIGIMOS

– ALGORITMO DEL SIMPLEX –

$c_j - z_j \geq 0$ ← OBJETIVO

2. Algoritmo Dual

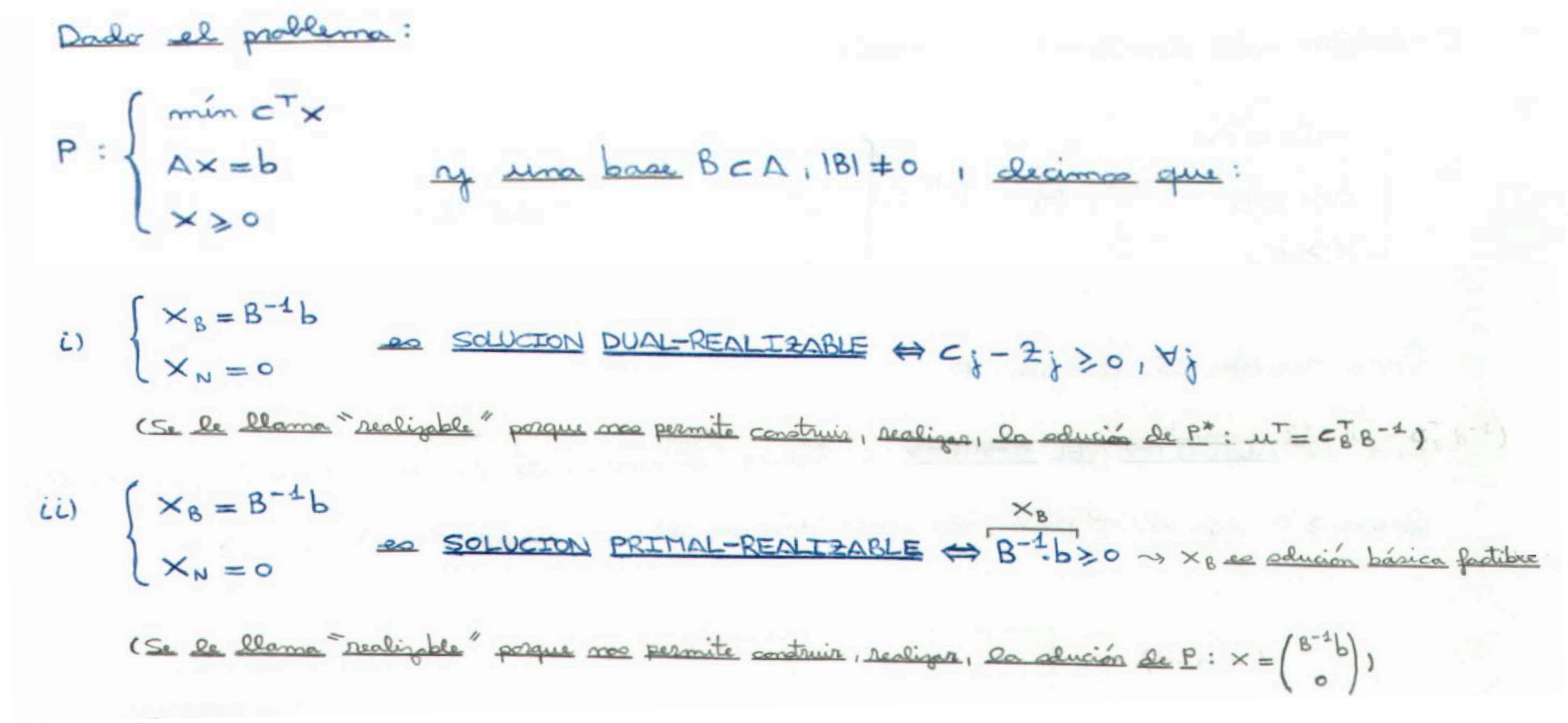
- Con el ALGORITMO DUAL también queremos resolver el problema P, pero invirtiendo los papeles de restricción y objetivo: partimos de una solución para la que exigimos que $c_j - z_j \geq 0$ y el objetivo que perseguimos es que $\overline{X}_B \geq 0$



En ambos casos, el algoritmo acaba cuando conseguimos un objetivo

Con el ALGORITMO DUAL resolvemos P a partir de su dual P*. Este algoritmo se utiliza, fundamentalmente, en problemas de postoptimización y parametrización. El esquema de razonamiento es análogo al de la Tabla del Simplex: buscaremos una REGLA DE PIVOTAJE de modo que la nueva fila de los $c_j - z_j$ sea ≥ 0 y que alguno de los X_B sean ≥ 0.

2. Algoritmo Dual



Dado el problema:

$$P : \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$ y una base $B \subset A$, $|B| \neq 0$, decimos que:

i) $\begin{cases} x_B = B^{-1} b \\ x_N = 0 \end{cases}$ es SOLUCION DUAL-REALIZABLE $\Leftrightarrow c_j - z_j \geq 0, \forall j$

(Se le llama "realizable" porque nos permite construir, realizar, la solución de P^*: $u^T = c_B^T B^{-1}$)

ii) $\begin{cases} x_B = B^{-1} b \\ x_N = 0 \end{cases}$ es SOLUCION PRIMAL-REALIZABLE $\Leftrightarrow \overbrace{B^{-1} \cdot b}^{x_B} \geq 0 \rightsquigarrow x_B$ es solución básica factible

(Se le llama "realizable" porque nos permite construir, realizar, la solución de P: $x = \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix}$)

Ejemplo 1

Consideramos el PPL siguiente:

$$P:\begin{cases} \text{Mín}\{2x_1+3x_2+x_3\} \\ x_1-x_2+2x_3\geq 3 \\ 2x_1+x_2-x_3\geq 2 \\ x_i\geq 0 \end{cases} \longleftrightarrow \quad P:\begin{cases} \text{Mín}\{2x_1+3x_2+x_3+0x_{s_1}+0x_{s_2}\} \\ x_1-x_2+2x_3-x_{s_1}=3 \\ 2x_1+x_2-x_3-x_{s_2}=2 \\ x_1,x_2,x_3,x_{s_1},x_{s_2}\geq 0 \end{cases}$$

La Tabla del Símplex sería:

$$\begin{array}{cc|ccccc|c}
 & & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_{s_1} & x_{s_2} & \\
\hline
0 & x_{s_1} & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\
0 & x_{s_2} & 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\
\hline
 & & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cc|ccccc|c}
 & & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_{s_1} & x_{s_2} & \\
\hline
0 & x_{s_1} & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & -3 \\
0 & x_{s_2} & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\
\hline
 & & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
\Big\} \not\geq 0$$

$$\underbrace{\qquad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \qquad}_{\geq 0} \longleftarrow \text{DUAL-REALIZABLE}$$

Ejemplo 1

SOLUCIÓN DUAL – REALIZABLE :

$$X_B = \begin{bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_{s_1} = -3 \\ x_{s_2} = -2 \end{bmatrix}, \quad B = \{a_{s_1}, a_{s_2}\}$$

(No es solución factible: $\bar{X}_B = B^{-1} \cdot b \ngeq 0$)

El problema dual asociado a P es:

$$P^*: \begin{cases} \text{Max}\{3u_1 + 2u_2\} \\ u_1 + 2u_2 \leq 2 \\ -u_1 + u_2 \leq 3 \\ 2u_1 - u_2 \leq 1 \\ u_1, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

Como $u^T = c_B^T \cdot B^{-1} = (0, 0) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (0, 0) \Rightarrow u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es solución factible de P^*

Ejemplo 1

$$\begin{array}{cc|ccccc|c}
 & & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_{s1} & x_{s2} & \\ \hline
1 & x_3 & 1/2 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 3/2 \\
0 & x_{s2} & -5/2 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 & -7/2 \\ \hline
 & & 3/2 & 7/2 & 0 & 1/2 & 0 & 3/2
\end{array}$$

$\left.\begin{matrix} 3/2 \\ -7/2 \end{matrix}\right\} \not\geq 0$

$B' = B \cup \{a_3\} \setminus \{a_{s1}\} = \{a_3, a_{s2}\}$

$3/2 \rightsquigarrow$ Mejor función objetivo

$\underbrace{3/2 \quad 7/2 \quad 0 \quad 1/2 \quad 0}_{\geq 0} \longleftarrow$ DUAL - REALIZABLE

Como: $u'^T = c_{B'}^T \cdot B'^{-1} = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix} = (1/2, 0) \Rightarrow u' = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ es solución del dual P^* mejor que $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Obtenemos también una nueva solución dual - realizable:

$$x_{B'} = \begin{bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3/2 \\ x_{s1} = 0 \\ x_{s2} = -7/2 \end{bmatrix}, \quad B' = \{a_3, a_{s2}\} \quad (\text{NO es solución factible}: \bar{x}_{B'} = B'^{-1} \cdot b \not\geq 0)$$

Ejemplo 1

$$\left.\begin{array}{cc|ccccc|c|}
 & & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_{s1} & x_{s2} & \\
\hline
1 & x_3 & 0 & -3/5 & 1 & -2/5 & 1/5 & 4/5 \\
2 & x_1 & 1 & 1/5 & 0 & -1/5 & -2/5 & 7/5 \\
\hline
\end{array}\right\} \geq 0$$

$$\begin{array}{cc|ccccc|c|}
\hline
 & & 0 & 16/5 & 0 & 4/5 & 3/5 & 18/5 \\
\hline
 & & \multicolumn{5}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\geq 0}} & \\
\end{array} \rightsquigarrow \text{Mejor función objetivo}$$

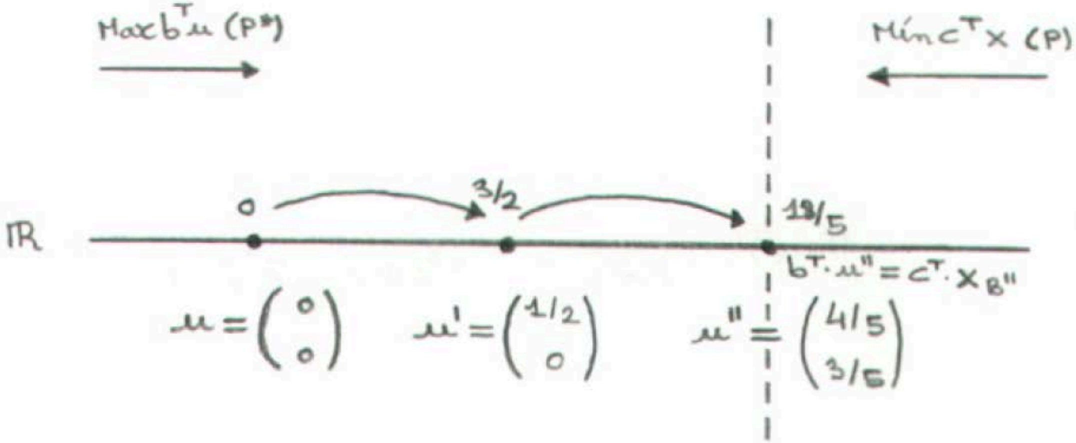
$$B'' = B' \cup \{a_1\} \setminus \{a_{s2}\} = \{a_3, a_1\}$$

Como: $u''^T = c_{B''}^T \cdot B''^{-1} = (1,2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = (1,2) \cdot \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \Rightarrow u'' = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$ es solución del dual P^* mejor que $u' = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ejemplo 1

Además, observando la Tabla del Simplex, se tiene que $X_{B''}$ es la solución óptima del problema P y u'' es la solución óptima del dual P* ($b^T \cdot u'' = c^T \cdot X_{B''}$). De esta forma, pues, hemos resuelto el PPL P:

$$X_{B''} = \begin{bmatrix} x_1 = 7/5 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 4/5 \\ x_{s1} = 0 \\ x_{s2} = 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{SOLUCIÓN ÓPTIMA DE P} \; //$$



Ejemplo 2

Una solución dual-realizable $\not\Rightarrow$ que sea solución factible

Veamoslo con un contraejemplo:

$$P: \begin{cases} \min\{x_1 + 2x_2 + 3x_3\} \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \longleftrightarrow \quad P: \begin{cases} \min\{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0x_{s1} + 0x_{s2}\} \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_{s1} = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_{s2} = 2 \\ x_1, x_2, x_{s1}, x_{s2} \geq 0 \end{cases}$$

La Tabla del Simplex asociada al problema P sería:

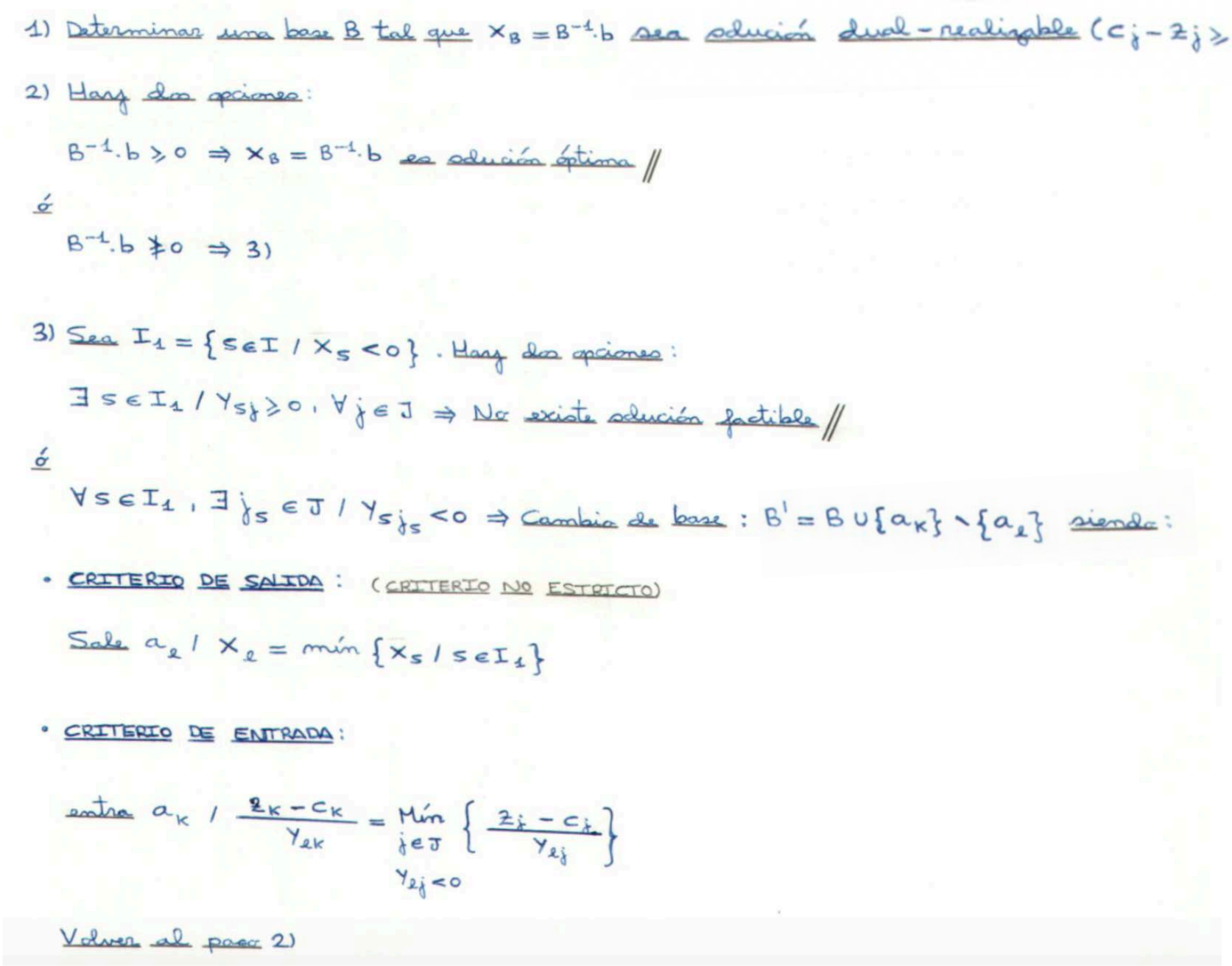
$$\begin{array}{cc|ccccc|c} & & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & \\ & & x_1 & x_2 & x_3 & x_{s1} & x_{s2} & \\ \hline 0 & x_{s1} & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & x_{s2} & 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ \hline & & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{(*)} \begin{array}{cc|ccccc|c} & & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & \\ & & x_1 & x_2 & x_3 & x_{s1} & x_{s2} & \\ \hline 0 & x_{s1} & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & x_{s2} & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ \hline & & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$\left.\begin{array}{c} -3 \\ -2 \end{array}\right\} < 0 \rightarrow$ NO PRIMAL-REALIZABLE

$\underbrace{1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0}_{\geq 0} \rightarrow$ DUAL-REALIZABLE

Así pues, el problema P es dual-realizable pero la solución obtenida para el primal no es factible: $\bar{x}_B = B^{-1}b < 0$ //

2.1. Pasos del Algoritmo Dual



1) Determinar una base B tal que $x_B = B^{-1}\cdot b$ sea solución dual-realizable $(c_j - z_j \geq 0, \forall j \in J)$

2) Hay dos opciones:

$B^{-1}\cdot b \geq 0 \Rightarrow x_B = B^{-1}\cdot b$ es solución óptima //

ó

$B^{-1}\cdot b \not\geq 0 \Rightarrow$ 3)

3) Sea $I_1 = \{s \in I \,/\, x_s < 0\}$. Hay dos opciones:

$\exists\, s \in I_1 \,/\, y_{sj} \geq 0, \forall j \in J \Rightarrow$ No existe solución factible //

ó

$\forall s \in I_1, \exists\, j_s \in J \,/\, y_{sj_s} < 0 \Rightarrow$ Cambio de base: $B' = B \cup \{a_k\} \setminus \{a_l\}$ siendo:

- **CRITERIO DE SALIDA:** (CRITERIO NO ESTRICTO)

  Sale $a_l \,/\, x_l = \min\{x_s \,/\, s \in I_1\}$

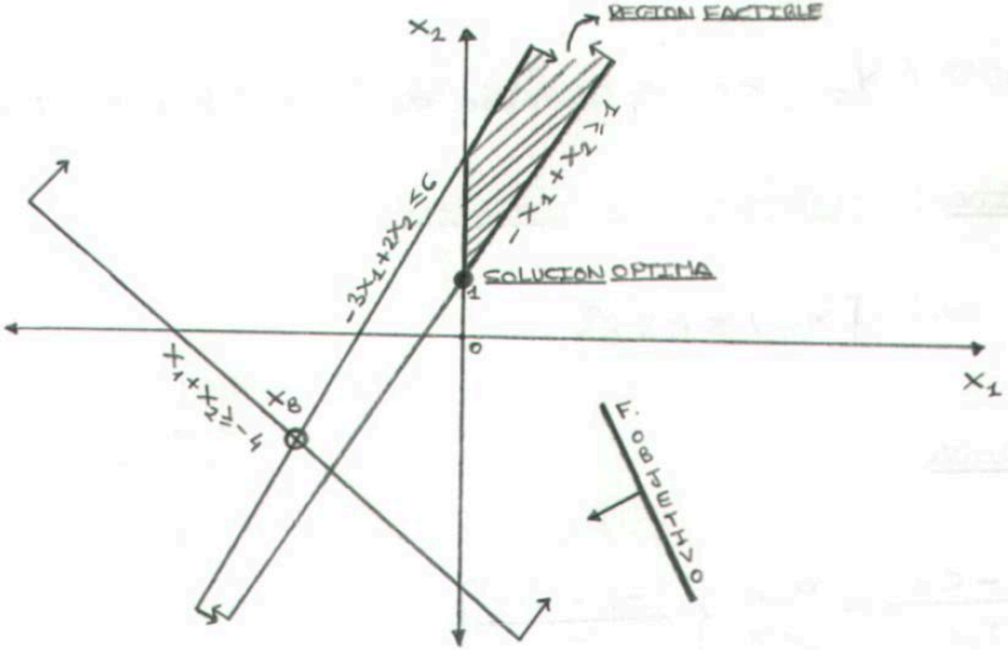
- **CRITERIO DE ENTRADA:**

  entra a_k / $\dfrac{z_k - c_k}{y_{lk}} = \min\limits_{\substack{j \in J \\ y_{lj} < 0}} \left\{ \dfrac{z_j - c_j}{y_{lj}} \right\}$

Volver al paso 2)

Ejemplo

$$P:\begin{cases} \text{Min}\{7x_1+x_2\} \\ -3x_1+2x_2\leq 6 \\ x_1+x_2\geq -4 \\ -x_1+x_2\geq 1 \\ x_1,x_2\geq 0 \end{cases} \longleftrightarrow P:\begin{cases} \text{Min}\{7x_1+x_2+0\cdot x_{s1}+0\cdot x_{s2}+0\cdot x_{s3}\} \\ -3x_1+2x_2+x_{s1}=6 \\ x_1+x_2-x_{s2}=-4 \\ -x_1+x_2-x_{s3}=1 \\ x_1,x_2,x_{s1},x_{s2},x_{s3}\geq 0 \end{cases}$$



Ejemplo

$$
P:\begin{cases}
\text{Min}\{7x_1 + x_2 + 0\cdot x_{s1} + 0\cdot x_{s2} + 0\cdot x_{s3}\} \\
-3x_1 + 2x_2 + x_{s1} = 6 \\
x_1 + x_2 - x_{s2} = -4 \\
-x_1 + x_2 - x_{s3} = 1 \\
x_1, x_2, x_{s1}, x_{s2}, x_{s3} \geq 0
\end{cases}
$$

Nos fijamos en la solución x_B con $B = (a_1, a_2, a_{s3})$

la Tabla del Simplex para esa solución es:

$$
\begin{array}{cc|ccccc|cl}
 & & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & x_1 & x_2 & x_{s1} & x_{s2} & x_{s3} & & \\
\hline
7 & x_1 & 1 & 0 & -1/5 & -2/5 & 0 & -14/5 & \\
1 & x_2 & 0 & 1 & 1/5 & -3/5 & 0 & -6/5 & \not\geq 0 \leftarrow \text{NO PRIMAL-REALIZABLE} \\
0 & x_{s3} & 0 & 0 & 2/5 & -1/5 & 1 & 3/5 & \\
\hline
 & & 0 & 0 & 6/5 & 17/5 & 0 & -104/5 & \approx -21
\end{array}
$$

$\geq 0 \leftarrow$ DUAL-REALIZABLE

se trata, pues, de una solución DUAL-REALIZABLE pero NO PRIMAL-REALIZABLE

Ejemplo

Aplicamos el ALGORITMO DUAL:

$I_1 = \{ s \in I / \bar{x}_s < 0 \} = \{1, 2\}$

Se verifica que:

$\forall s \in I_1, \exists j_s \in J / y_{s j_s} < 0$

Hacemos, pues, un cambio de base:

Sale $a_\ell / \bar{x}_\ell = \text{Mín}\{ \bar{x}_s / s \in I_1 \}$ (CRITERIO NO ESTRICTO)

en nuestro caso: $\ell = 1$

Entra $a_K / \dfrac{z_K - c_K}{y_{\ell K}} = \text{Mín}\left\{ \dfrac{z_j - c_j}{y_{\ell j}} / y_{\ell j} < 0 \right\}$

en nuestro caso:

$$\text{mín}\left\{ \frac{-6/5}{-1/5}, \frac{-17/5}{-2/5} \right\} = \text{mín}\left\{ 6, \frac{17}{2} \right\} = 6 = \frac{z_{s1} - c_{s1}}{y_{1,s1}}$$

luego $K = S1$

Por tanto, la nueva base es: $B' = (a_{s1}, a_2, a_{s3})$ y el pivote: $y_{1,s1}$

Ejemplo

Pivotamos, obteniendo la tabla siguiente:

$$\begin{array}{cc|ccccc|c}
 & & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & x_1 & x_2 & x_{s1} & x_{s2} & x_{s3} & \\
\hline
0 & x_{s1} & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 14 \\
1 & x_2 & \boxed{1} & 1 & 0 & \boxed{-1} & 0 & -4 \\
0 & x_{s3} & \boxed{2} & 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & -5 \\
\hline
 & & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\
\hline
\end{array}$$

$\not\geq 0 \leftarrow$ NO PRIMAL-REALIZABLE

$\geq 0 \leftarrow$ DUAL-REALIZABLE

Volvemos a iterar el proceso del ALGORITMO DUAL:

$I_1 = \{2, s3\}$, $l = s3$, $K = s2$

La nueva base es: $B'' = (a_{s1}, a_2, a_{s2})$ y el pivote: $y_{s3,s2}$

La nueva tabla será:

$$\begin{array}{cc|ccccc|c}
 & & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & x_1 & x_2 & x_{s1} & x_{s2} & x_{s3} & \\
\hline
0 & x_{s1} & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\
1 & x_2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & x_{s2} & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\
\hline
 & & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

$\geq 0 \leftarrow$ PRIMAL-REALIZABLE

$\geq 0 \leftarrow$ DUAL-REALIZABLE

OPTIMO DE P

$$\Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_{s1} = 4 \\ x_{s2} = 5 \\ x_{s3} = 0 \end{bmatrix}$$

Luego se obtiene una solución factible y dual-realizable $\Rightarrow$ Tenemos la solución óptima del problema original P (NO DE SU DUAL)//

3. Post-Optimización y Sensibilidad

Dado un PPL:

$$P: \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Con el estudio de los PROBLEMAS DE POSTOPTIMIZACION:

se trata de analizar como influye en la Tabla del Simplex el cambio del

1) vector c por c', ó del
2) vector b por b', ó

• modificación de los vectores c y b

3) Añadir una variable, ó
4) Añadir una restricción.

• adición de nuevas variables y restricciones

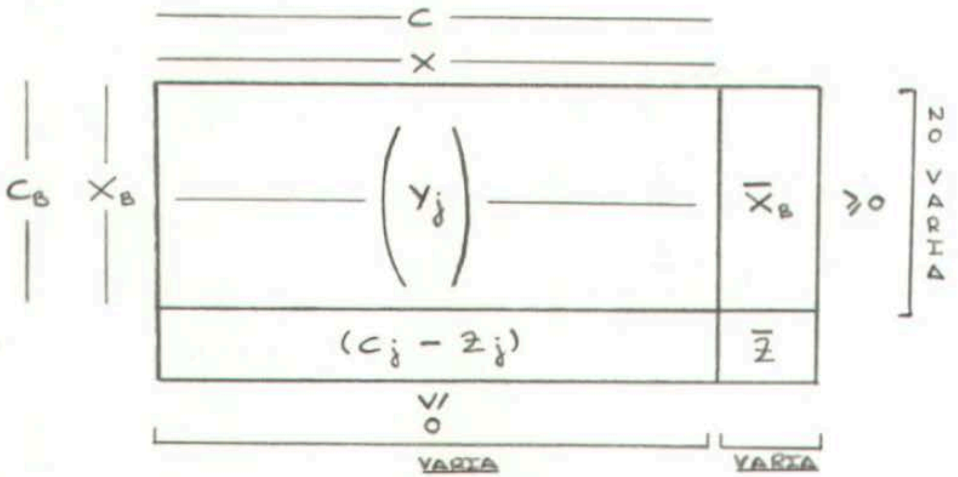
(estos cambios pueden producirse cuando nos damos cuenta de que hay un error en los datos del problema ya calculado)

estas modificaciones las estudiaremos con el fin de no tener que repetir los calculos ya hechos, aprovechando lo que ya tenemos.

3. Post-Optimización y Sensibilidad

1) CAMBIO DEL VECTOR c POR EL VECTOR c':

Consideramos la Tabla del Simplex óptima para P con el vector c:



Al cambiar c por c', lo que varía es la fila: $c_j - z_j$ y $\bar{z}$.

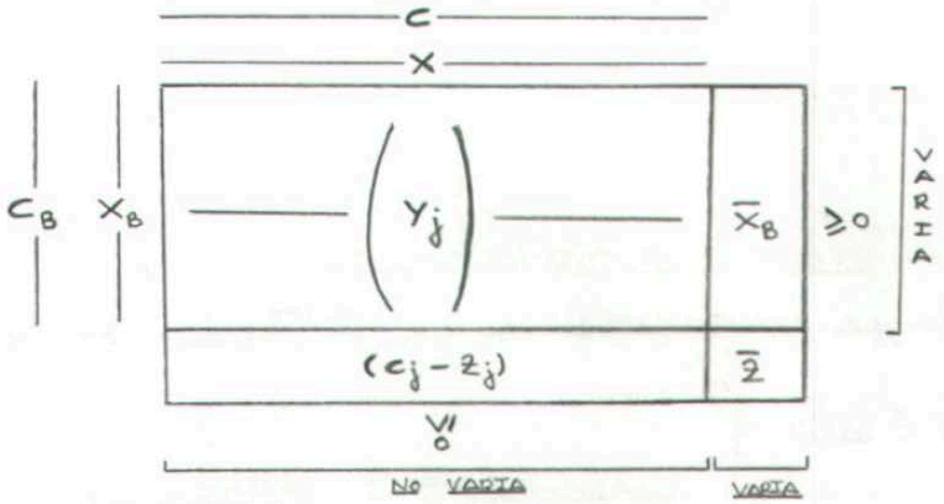
Por tanto, se trata de cambiar la última fila tomando unos nuevos: $c'_j - z'_j$. Pueden darse dos casos:

- $c'_j - z'_j \geq 0$, $\forall j$ ⇝ la solución óptima no varía
- en caso contrario, seguiríamos aplicando el algoritmo del Simplex.

3. Post-Optimización y Sensibilidad

2) CAMBIO DEL VECTOR b POR OTRO VECTOR b':

En la Tabla del Símplex óptima para b:



Al cambiar b por b':

No varía el que la solución sea dual-realizable (pues $c_j - z_j \geq 0$ no varía)

Varían $\bar{x}_B$ y $\bar{z}$. Consideramos entonces los nuevos $\bar{x}'_B$ y $\bar{z}'$:

- Si $\bar{x}'_B \geq 0$ ⇝ se tiene el óptimo.
- En otro caso, aplicaríamos el algoritmo dual.

Ejemplo

Consideramos el PPL:

$$P: \begin{cases} \text{Min}\{x_1 - 3x_2 - x_3\} \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

La Tabla del Simplex óptima para P es:

$$\begin{array}{cc|ccc|cl}
 & & 1 & -3 & -1 & & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & & \\
\hline
-3 & x_2 & 2/5 & 1 & 0 & 12/5 & \rbrace \\
-1 & x_3 & -1/5 & 0 & 1 & 4/5 & \rbrace \geq 0 \\
\hline
 & & \multicolumn{3}{c|}{\underbrace{2 \qquad 0 \qquad 0}_{\geq 0}} & -8 & \\
\hline
\end{array}$$

$\rightsquigarrow$ SOLUCION OPTIMA: $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 12/5 \\ x_3 = 4/5 \end{pmatrix}$

Ejemplo

- Si cambiamos el vector de coeficientes c por un nuevo vector $c' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, la nueva tabla del Simplex sería:

$$\begin{array}{cc|ccc|cl}
 & & -1 & 2 & 3 & & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & & \\
\hline
2 & x_2 & 2/5 & 1 & 0 & 12/5 & \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \geq 0 \\
3 & x_3 & -1/5 & 0 & 1 & 4/5 & \\
\hline
 & & \multicolumn{3}{c|}{\underbrace{-6/5 \qquad 0 \qquad 0}_{\not\geq 0}} & 36/5 &
\end{array}$$

donde ya no tenemos solución óptima. En este caso, tendríamos que seguir aplicando el Algoritmo del Simplex.

Ejemplo

- Si hubiésemos cambiado el vector b por un nuevo vector $b' = \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \end{pmatrix}$, la nueva tabla del Simplex sería:

$$
\begin{array}{cc|ccc|c}
 & & 1 & -3 & -1 & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
-3 & x_2 & 2/5 & 1 & 0 & -32/10 \\
-1 & x_3 & -1/5 & 0 & 1 & 36/10 \\
\hline
 & & 2 & 0 & 0 & 6
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right\} \ngeq 0
$$

$$
\overline{X}'_B = B^{-1} \cdot b' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{10} & -\frac{4}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32/10 \\ 36/10 \end{pmatrix}
$$

Tenemos una solución que es DUAL-REALIZABLE y NO PRIMAL-REALIZABLE. En este caso, aplicaríamos el Algoritmo Dual:

$I_1 = \{2\}$ y estamos en el caso: $\exists\, s \in I_1 / y_{sj} \geq 0,\ \forall j \in J \Rightarrow \nexists$ SOLUCION FACTIBLE

Ejemplo

- Si hubiesemos cambiado el vector b por el vector $b'' = \binom{14}{8}$, la nueva tabla del Simplex sería:

$$
\begin{array}{cc|ccc|c}
 & & 1 & -3 & -1 & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
-3 & x_2 & 2/5 & 1 & 0 & 38/10 \\
-1 & x_3 & -1/5 & 0 & 1 & -4/10 \\
\hline
 & & 2 & 0 & 0 & -11 \\
\hline
\end{array}
$$

Aplicando el Algoritmo Dual:

$$
\begin{array}{cc|ccc|c}
 & & 1 & -3 & -1 & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
-3 & x_2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
1 & x_1 & 1 & 0 & -5 & 2 \\
\hline
 & & 0 & 0 & 10 & -7 \\
\hline
\end{array}
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\} \geq 0
\quad \rightsquigarrow \text{SOLUCION OPTIMA: } \quad \overline{X}' = \begin{pmatrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 0 \end{pmatrix}
$$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

3.1. Introducción de Nuevas Variables

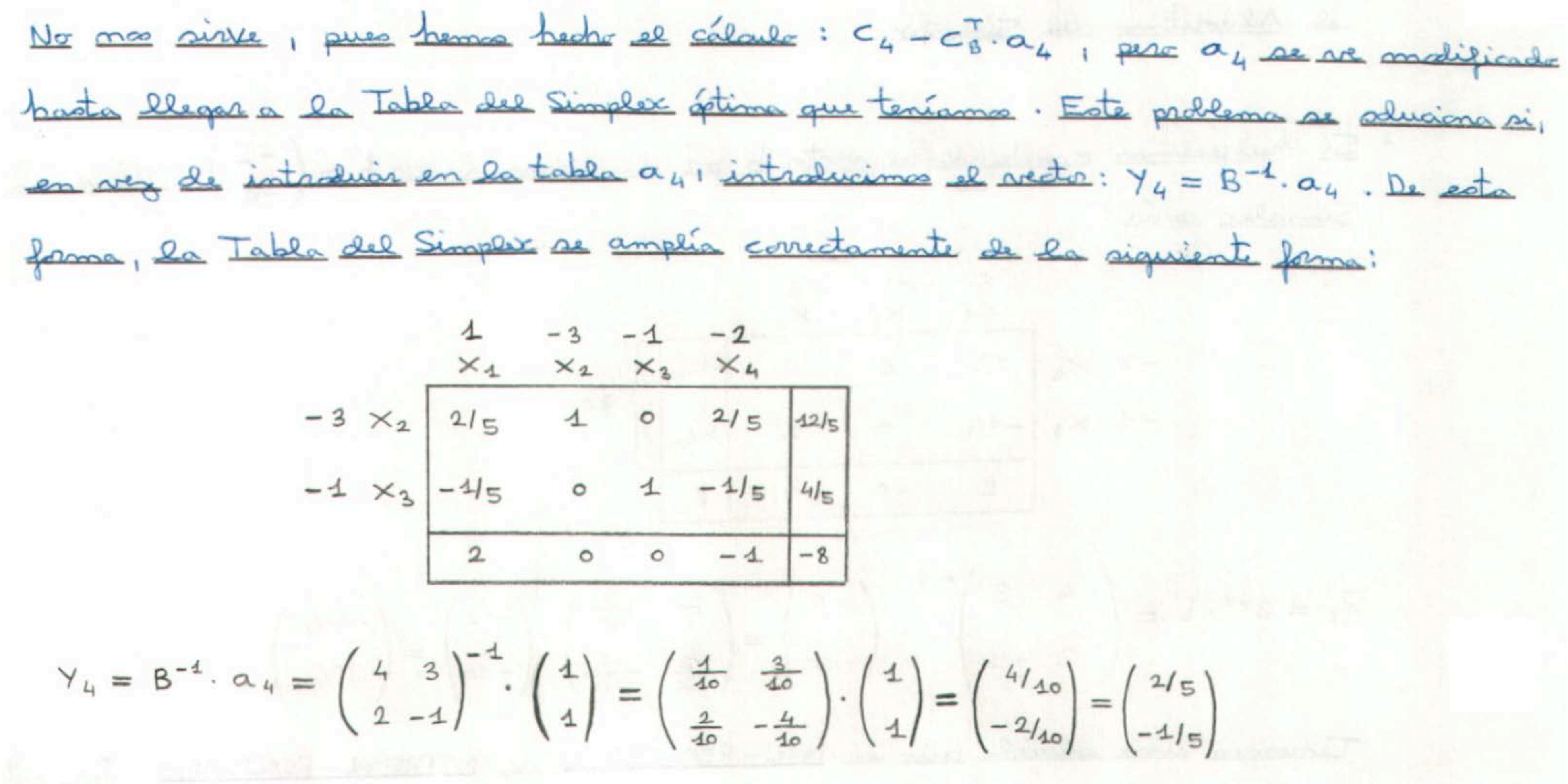
Consideramos el PPL:

$$P: \begin{cases} \text{Min}\,\{x_1 - 3x_2 - x_3\} \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Supongamos que en el ejemplo anterior, queremos añadir al problema P una nueva variable x_4 tal que: $c_4 = -2$ y $a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Para este caso, la Tabla del Simplex óptima que ya teníamos no nos sirve si la ampliamos de la forma siguiente:

		1	−3	−1	−2	
		x_1	x_2	x_3	x_4	
−3	x_2	2/5	1	0	1	12/5
−1	x_3	−1/5	0	1	1	4/5
		2	0	0	2	−8

Ejemplo



No nos sirve, pues hemos hecho el cálculo: $c_4 - c_B^T \cdot a_4$, pero a_4 se ve modificado hasta llegar a la Tabla del Simplex óptima que teníamos. Este problema se soluciona si, en vez de introducir en la tabla a_4, introducimos el vector: $Y_4 = B^{-1} \cdot a_4$. De esta forma, la Tabla del Simplex se amplía correctamente de la siguiente forma:

		1	-3	-1	-2	
		x_1	x_2	x_3	x_4	
-3	x_2	2/5	1	0	2/5	12/5
-1	x_3	-1/5	0	1	-1/5	4/5
		2	0	0	-1	-8

$$Y_4 = B^{-1} \cdot a_4 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{10} & -\frac{4}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/10 \\ -2/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$$

3.2. Introducción de Nuevas Inecuaciones

Este método nos sirve tanto para inecuaciones del tipo ≤ como del tipo ≥

1) Introducir variable de holgura (X_s)

2) Introducir en la Tabla del Simplex óptima:

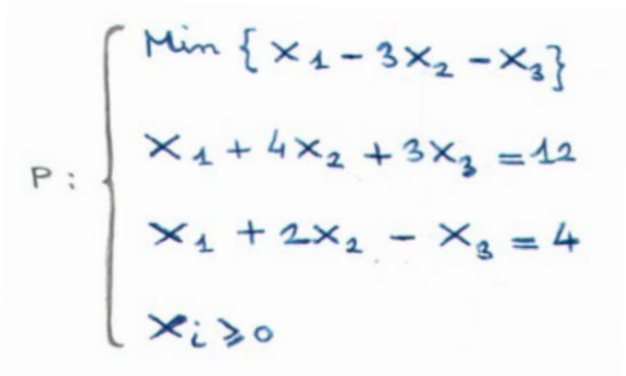
- Una nueva columna asociada a X_s
- Una nueva fila asociada a la nueva restricción

3) Modificar la Tabla para obtener una submatriz identidad ampliada.

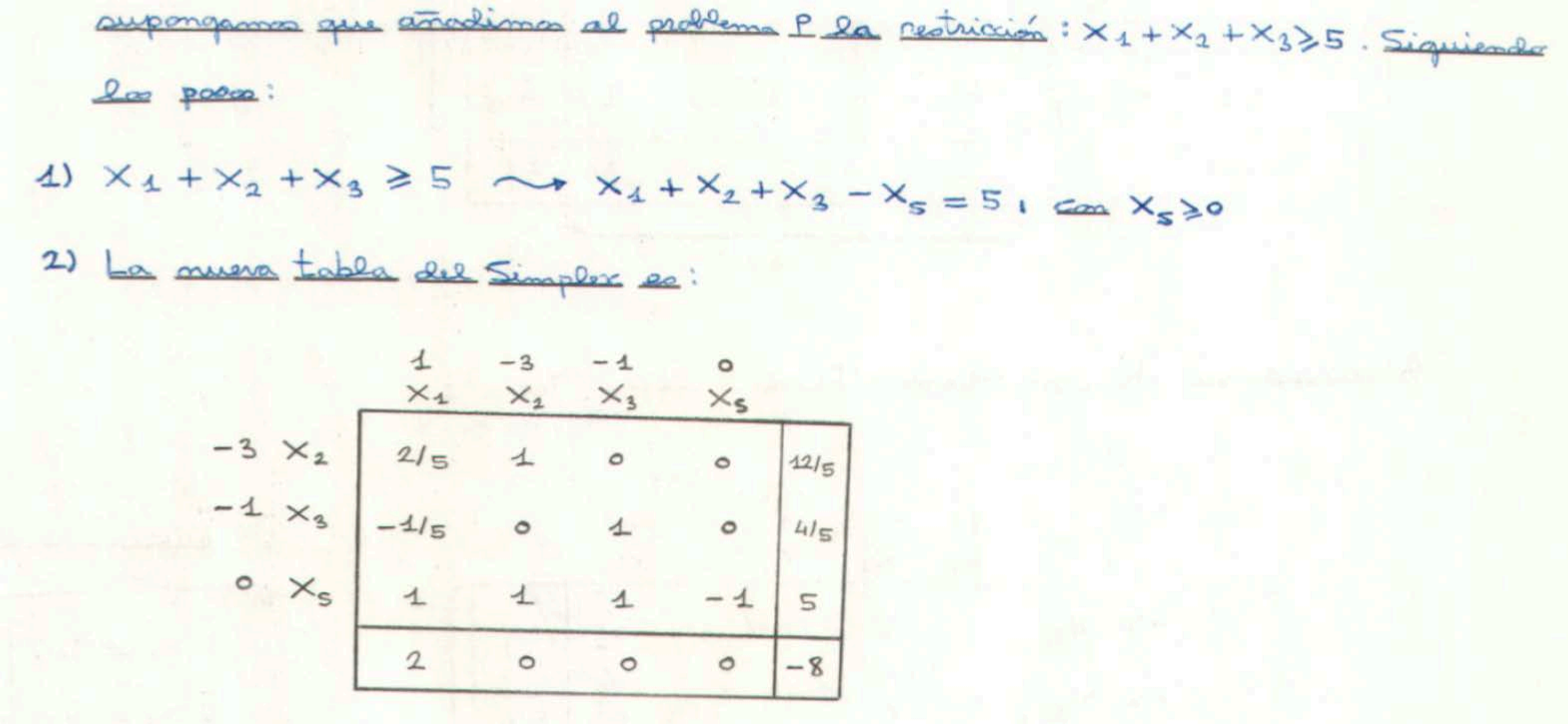
4) Al ser el coste de X_s "0", la nueva base ampliada es una solución dual-realizable.

5) Aplicar el Algoritmo dual, manteniendo X_s.

Ejemplo



$$P: \begin{cases} \text{Min}\ \{x_1 - 3x_2 - x_3\} \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$



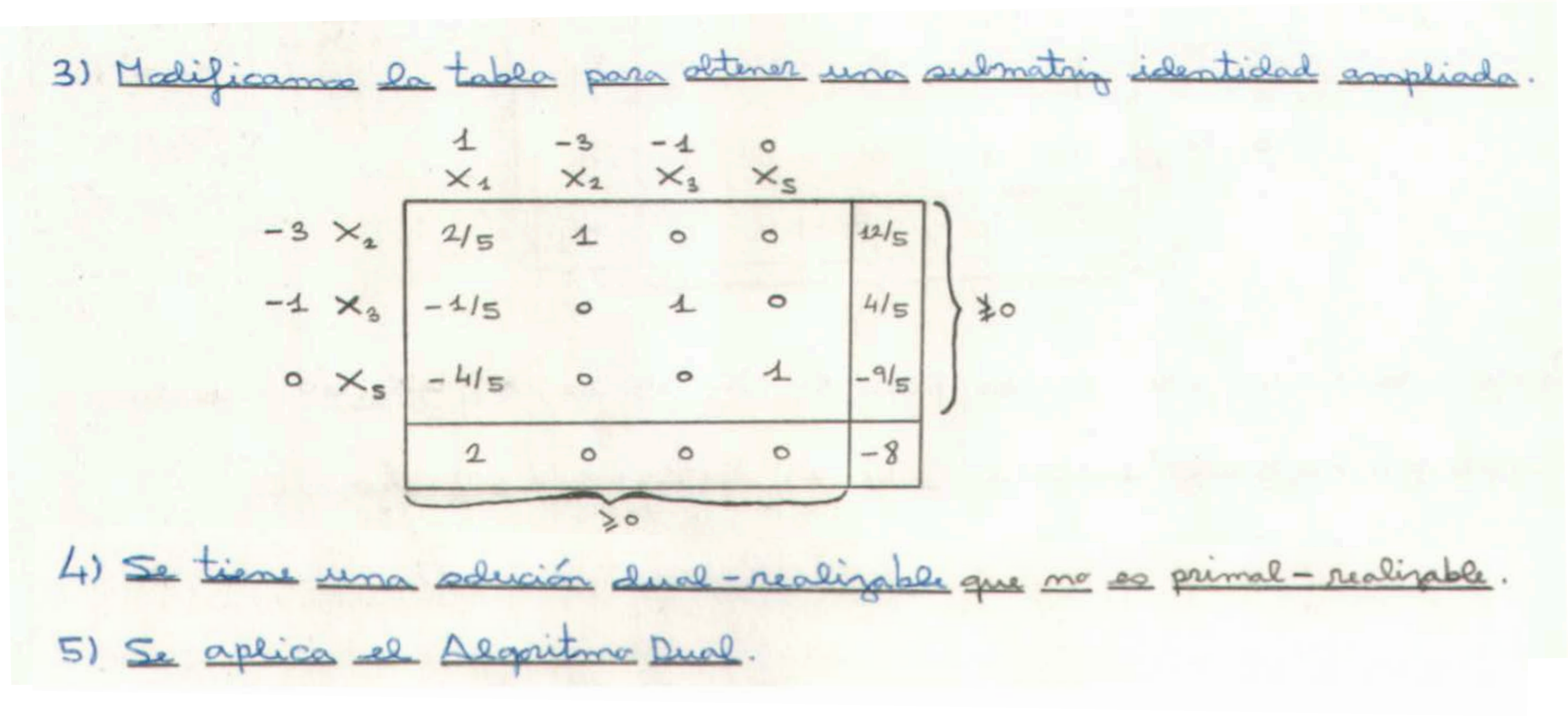
supongamos que añadimos al problema P la restricción: $x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$. Siguiendo los pasos:

1) $x_1 + x_2 + x_3 \geq 5 \rightsquigarrow x_1 + x_2 + x_3 - x_s = 5$, con $x_s \geq 0$

2) La nueva tabla del Simplex es:

		1	-3	-1	0	
		x_1	x_2	x_3	x_s	
-3	x_2	2/5	1	0	0	12/5
-1	x_3	-1/5	0	1	0	4/5
0	x_s	1	1	1	-1	5
		2	0	0	0	-8

Ejemplo



3) Modificamos la tabla para obtener una submatriz identidad ampliada.

$$\begin{array}{cc|cccc|c}
 & & 1 & -3 & -1 & 0 & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_5 & \\
\hline
-3 & x_2 & 2/5 & 1 & 0 & 0 & 12/5 \\
-1 & x_3 & -1/5 & 0 & 1 & 0 & 4/5 \\
0 & x_5 & -4/5 & 0 & 0 & 1 & -9/5 \\
\hline
 & & 2 & 0 & 0 & 0 & -8 \\
\hline
\end{array}$$

$\not\geq 0$

≥ 0

4) Se tiene una solución dual-realizable que no es primal-realizable.

5) Se aplica el Algoritmo Dual.

Ejemplo

Estudiamos qué pasa ahora cuando introducimos, como nueva restricción, una ecuación, por ejemplo, para el problema P: $X_1+X_2+X_3=5$

Podemos convertir esta ecuación en dos inecuaciones:

$$X_1+X_2+X_3=5 \rightarrow \begin{cases} X_1+X_2+X_3\geq 5 \\ X_1+X_2+X_3\leq 5 \end{cases} \xrightarrow[\text{Introduciendo variables de holgura}]{} \begin{cases} X_1+X_2+X_3-X_{s1}=5 \\ X_1+X_2+X_3+X_{s2}=5 \end{cases},\ X_{s1},X_{s2}\geq 0$$

La nueva Tabla del Simplex será: (Ya tomando una submatriz identidad, como hemos hecho antes)

$$\begin{array}{cc|ccccc|c}
 & & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 & \\
 & & X_1 & X_2 & X_3 & X_{s1} & X_{s2} & \\
\hline
-3 & X_2 & 2/5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 12/5 \\
-1 & X_3 & -1/5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4/5 \\
0 & X_{s1} & -4/5 & 0 & 0 & 1 & 0 & -9/5 \\
0 & X_{s2} & 4/5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9/5 \\
\hline
 & & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\
\hline
\end{array}$$

$\ngeq 0$

≥ 0

Ejemplo

Aplicaríamos ahora el Algoritmo Dual: (PIVOTE : $y_{s1,1}$)

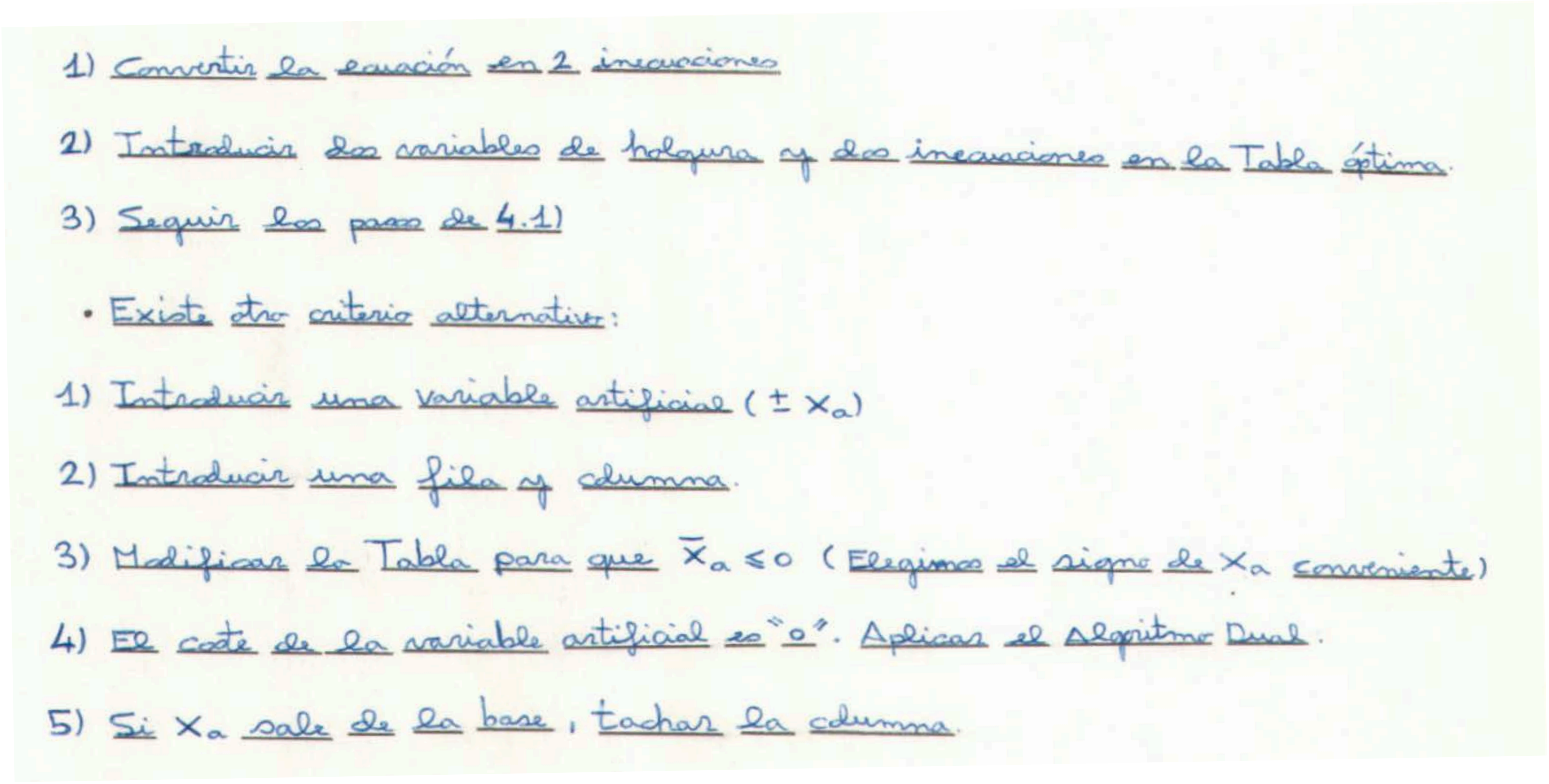
$$\begin{array}{cc|ccccc|c}
 & & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_{s1} & x_{s2} & \\
\hline
-3 & x_2 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 3/2 \\
-1 & x_3 & 0 & 0 & 1 & -1/4 & 0 & 5/4 \\
1 & x_1 & 1 & 0 & 0 & -5/4 & 0 & 9/4 \\
0 & x_{s2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & & \underbrace{0 & 0 & 0 & 5/4 & 0}_{\geq 0} & -7/2
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{c} 3/2 \\ 5/4 \\ 9/4 \\ 0 \end{array}\right\} \geq 0 \rightsquigarrow \bar{x}' = \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 = 9/4 \\ x_2 = 3/2 \\ x_3 = 5/4 \\ x_{s1} = 0 \\ x_{s2} = 0 \end{bmatrix}}^{\text{SOLUCIÓN ÓPTIMA}}$$

Luego, el único valor posible para $x_{s1}, x_{s2} \geq 0$ es: $x_{s1} = x_{s2} = 0$, es decir:

Cuando una inecuación sale de la base, la otra se anula automáticamente.

3.3. Introducción de Nuevas Ecuaciones



1) Convertir la ecuación en 2 inecuaciones

2) Introducir las variables de holgura y las inecuaciones en la Tabla óptima.

3) Seguir los pasos de 4.1)

- Existe otro criterio alternativo:

1) Introducir una variable artificial ($\pm x_a$)

2) Introducir una fila y columna.

3) Modificar la Tabla para que $\bar{x}_a \leq 0$ (Elegimos el signo de x_a conveniente)

4) El coste de la variable artificial es "0". Aplicar el Algoritmo Dual.

5) Si x_a sale de la base, tachar la columna.

Ejemplo

Aplicamos este segundo criterio para el ejemplo anterior y la misma ecuación:

$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \rightsquigarrow x_1 + x_2 + x_3 \pm x_a = 5$

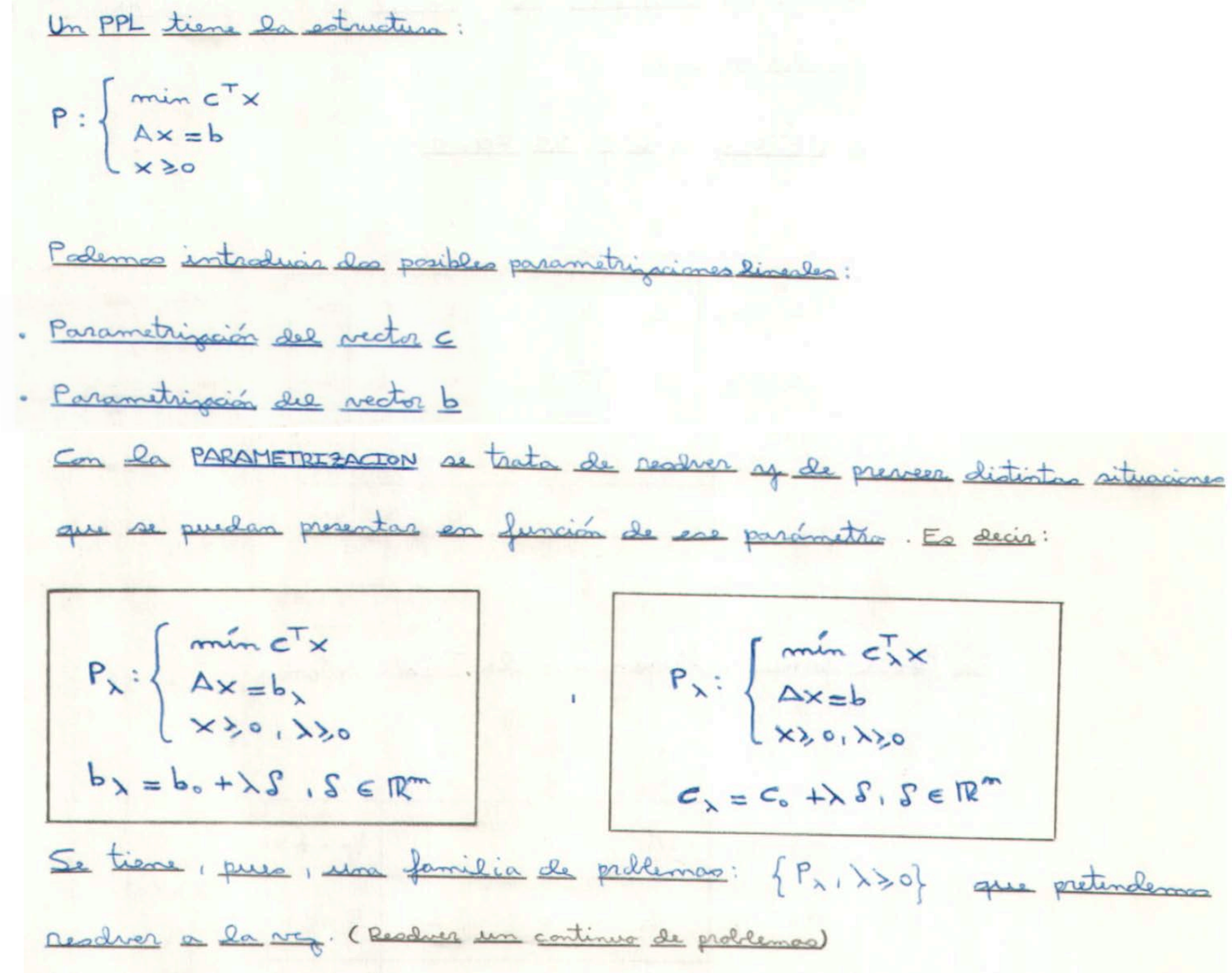
La Tabla del Simplex, consiguiendo ya una submatriz "identidad", es:

$$\begin{array}{cc|cccc|c}
 & & 1 & -3 & -1 & 0 & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_a & \\
\hline
-3 & x_2 & 2/5 & 1 & 0 & 0 & 12/5 \\
-1 & x_3 & -1/5 & 0 & 1 & 0 & 4/5 \\
0 & x_a & 4/5 & 0 & 0 & \pm 1 & 9/5 \\
\hline
 & & 2 & 0 & 0 & 0 & -8
\end{array}$$

- para que la variable artificial salga de la base, nos interesa que el signo de la variable sea negativo, pues sino ya tendríamos una base pero con la variable artificial.

$$\begin{array}{cc|cccc|c}
 & & 1 & -3 & -1 & 0 & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_a & \\
\hline
-3 & x_2 & 2/5 & 1 & 0 & 0 & 12/5 \\
-1 & x_3 & -1/5 & 0 & 1 & 0 & 4/5 \\
0 & x_a & 4/5 & 0 & 0 & -1 & 9/5 \\
\hline
 & & 2 & 0 & 0 & 0 & -8
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cc|cccc|cl}
 & & 1 & -3 & -1 & 0 & & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_a & & \\
\hline
-3 & x_2 & 2/5 & 1 & 0 & 0 & 12/5 & \\
-1 & x_3 & -1/5 & 0 & 1 & 0 & 4/5 & \Big\} \not\geq 0 \\
0 & x_a & -4/5 & 0 & 0 & 1 & -9/5 & \\
\hline
 & & \multicolumn{4}{c|}{\underbrace{2 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0}_{\geq 0}} & -8 &
\end{array}$$

4. Parametrización Lineales



Un PPL tiene la estructura:

$$P : \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Podemos introducir dos posibles parametrizaciones lineales:

- Parametrización del vector c
- Parametrización del vector b

Con la PARAMETRIZACION se trata de resolver y de prever distintas situaciones que se puedan presentar en función de ese parámetro. Es decir:

$$P_\lambda : \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b_\lambda \\ x \geq 0 , \lambda \geq 0 \end{cases}$$

$$b_\lambda = b_0 + \lambda \delta , \delta \in \mathbb{R}^m$$

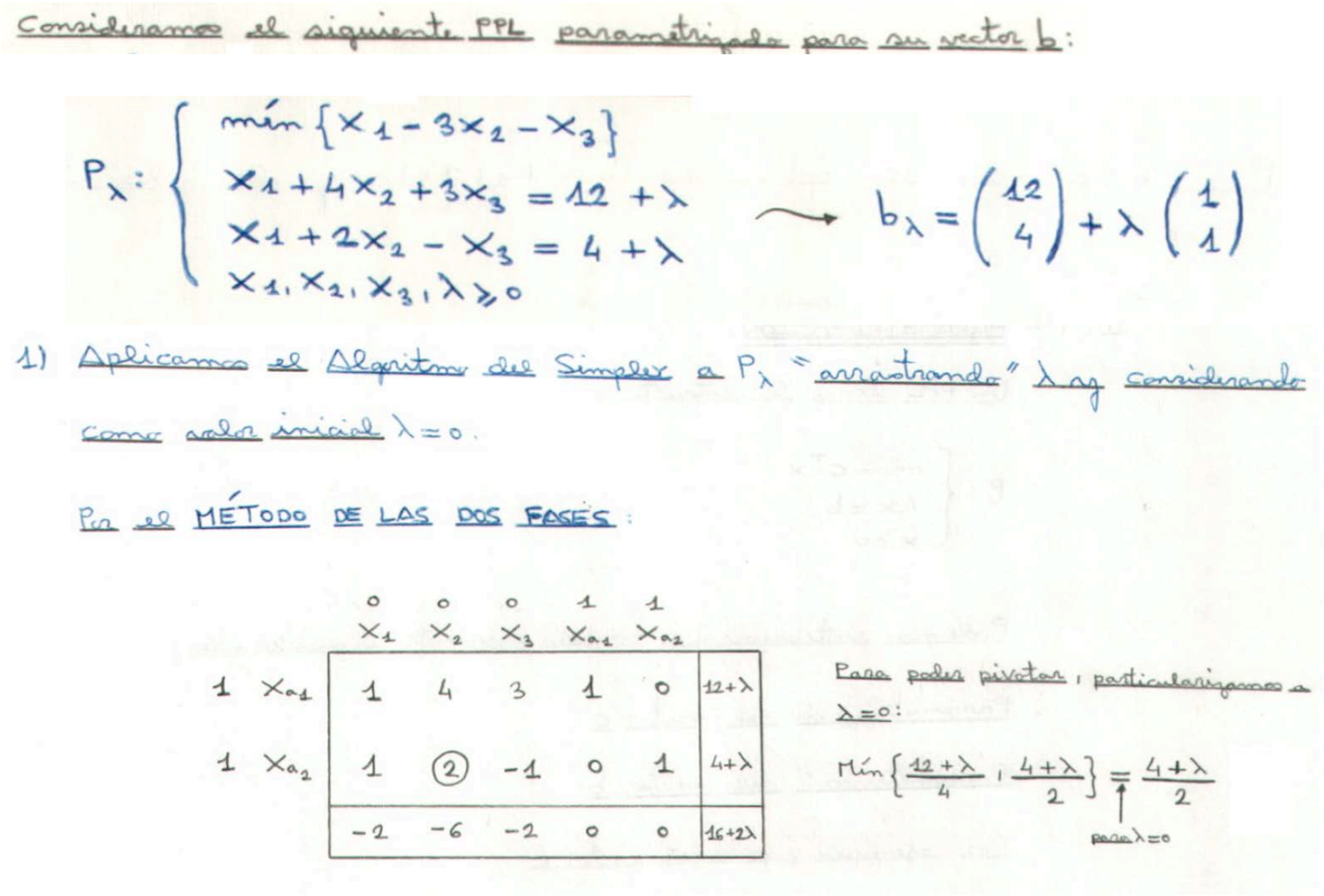
,

$$P_\lambda : \begin{cases} \min c_\lambda^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 , \lambda \geq 0 \end{cases}$$

$$c_\lambda = c_0 + \lambda \delta , \delta \in \mathbb{R}^m$$

Se tiene, pues, una familia de problemas: $\{P_\lambda , \lambda \geq 0\}$ que pretendemos resolver a la vez. (Resolver un continuo de problemas)

Ejemplo



Consideramos el siguiente PPL parametrizado para su vector b:

$$P_\lambda : \begin{cases} \min\{x_1 - 3x_2 - x_3\} \\ x_1+4x_2+3x_3 = 12+\lambda \\ x_1+2x_2-x_3 = 4+\lambda \\ x_1, x_2, x_3, \lambda \geqslant 0 \end{cases} \longrightarrow \quad b_\lambda = \begin{pmatrix}12\\4\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

1) Aplicamos el Algoritmo del Simplex a P_λ "arrastrando" λ y considerando como valor inicial $\lambda = 0$.

Por el MÉTODO DE LAS DOS FASES:

$$\begin{array}{cc|ccccc|c} & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\ & & x_1 & x_2 & x_3 & x_{a_1} & x_{a_2} & \\ \hline 1 & x_{a_1} & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 12+\lambda \\ 1 & x_{a_2} & 1 & \textcircled{2} & -1 & 0 & 1 & 4+\lambda \\ \hline & & -2 & -6 & -2 & 0 & 0 & 16+2\lambda \end{array}$$

Para poder pivotar, particularizamos a $\lambda = 0$:

$$\min\left\{\frac{12+\lambda}{4}, \frac{4+\lambda}{2}\right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{para } \lambda=0}}{=} \frac{4+\lambda}{2}$$

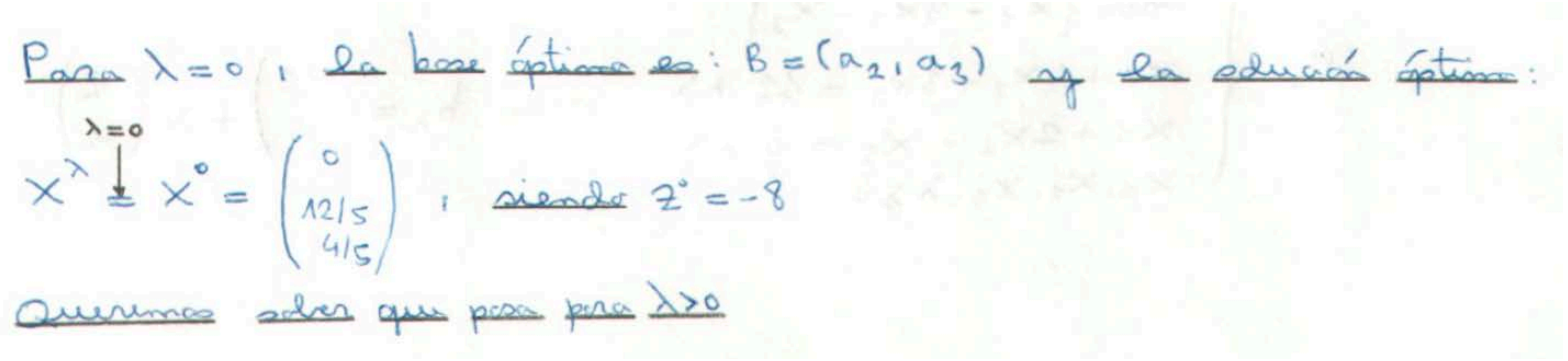
Ejemplo

$$
\begin{array}{cc|ccccc|c}
 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_{a_1} & x_{a_2} & \\
\hline
1 & x_{a_1} & -1 & 0 & \textcircled{5} & 1 & -2 & 4-\lambda \\
0 & x_2 & 1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 2+\frac{\lambda}{2} \\
\hline
 & & 1 & 0 & -5 & 0 & 3 & 4-\lambda \\
\hline
\end{array}
$$

De esta forma, llegamos a la Tabla óptima:

$$
\begin{array}{cc|ccc|c}
 & & 1 & -3 & -1 & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
-3 & x_2 & 2/5 & 1 & 0 & \frac{12}{5}+\frac{2}{5}\lambda \\
-1 & x_3 & -1/5 & 0 & 1 & \frac{4}{5}-\frac{1}{5}\lambda \\
\hline
 & & 2 & 0 & 0 & -8-\lambda \\
\hline
 & & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\geq 0}} &
\end{array}
\qquad (\lambda \geq 0)
$$

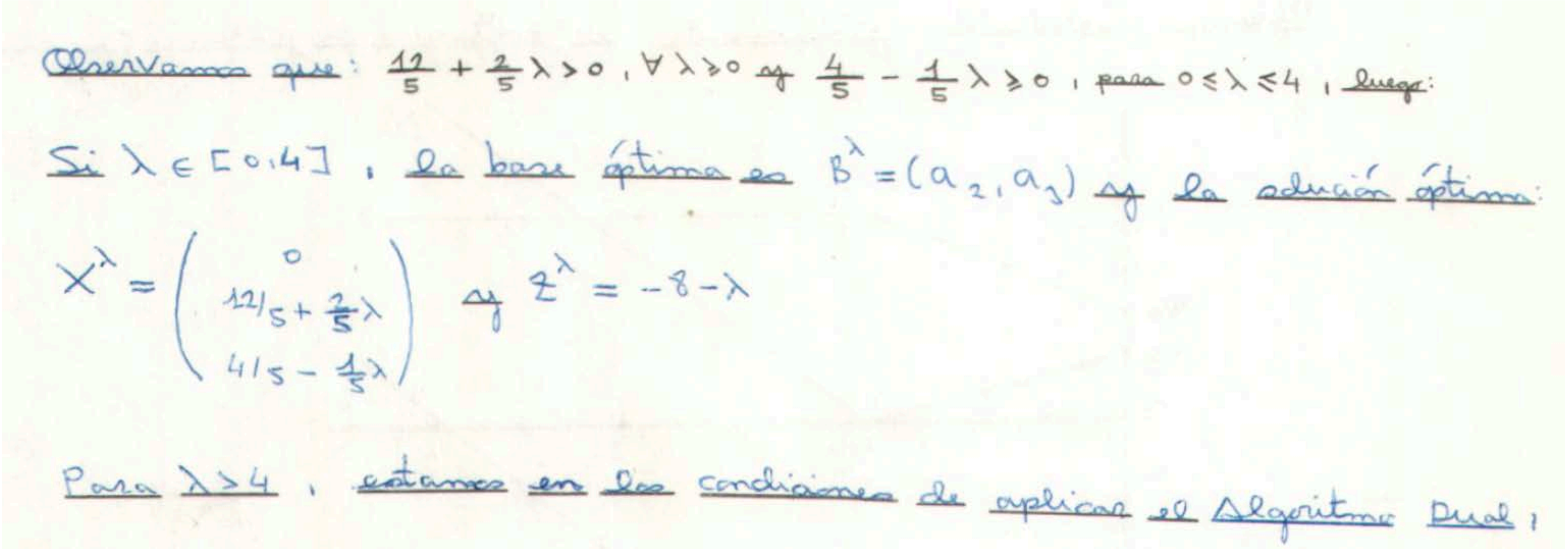
Ejemplo



Para $\lambda = 0$, la base óptima es: $B = (a_2, a_3)$ y la solución óptima:

$$x^\lambda \xrightarrow{\lambda=0} x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 12/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}, \text{ siendo } z^0 = -8$$

Queremos saber qué pasa para $\lambda > 0$



Observamos que: $\frac{12}{5} + \frac{2}{5}\lambda > 0$, $\forall \lambda \geq 0$ y $\frac{4}{5} - \frac{1}{5}\lambda \geq 0$, para $0 \leq \lambda \leq 4$, luego:

Si $\lambda \in [0,4]$, la base óptima es $B^\lambda = (a_2, a_3)$ y la solución óptima:

$$x^\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 12/5 + \frac{2}{5}\lambda \\ 4/5 - \frac{1}{5}\lambda \end{pmatrix} \text{ y } z^\lambda = -8 - \lambda$$

Para $\lambda > 4$, estamos en las condiciones de aplicar el Algoritmo Dual,

Ejemplo

es decir, en resumen:

2) Identificamos el intervalo de λ para el que la base sigue siendo óptima

3) A partir del valor crítico de λ (λ^*), aplicamos: (en nuestro caso: $\lambda^* = 4$)

- El Algoritmo del Simplex (c_λ)
- El Algoritmo del Dual (b_λ)

"arrastrando" λ y considerando $\lambda = \lambda^*$

En nuestro caso, aplicando el Algoritmo Dual:

$$\begin{array}{cc|ccc|c}
 & & 1 & -3 & -1 & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
-3 & x_2 & 0 & 1 & 2 & 4 \\
1 & x_1 & 1 & 0 & -5 & \lambda - 4 \\
\hline
 & & 0 & 0 & 10 & \lambda - 16 \\
\hline
\end{array}$$

$\left.\begin{array}{c} 4 \\ \lambda - 4 \end{array}\right\} \geq 0$ para $\lambda \geq 4$

$\underbrace{0 \quad 0 \quad 10}_{\geq 0}$

Ejemplo

luego tenemos la solución óptima $\forall \lambda \geq 4$: La base óptima sería, $B^\lambda = (a_2, a_1)$

y $x^\lambda = \begin{pmatrix} \lambda - 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $z^\lambda = \lambda - 16$

luego queda resuelto el problema para todo $\lambda \geq 0$

Podemos representar gráficamente el continuo de problemas (sus soluciones)