

Tema 6: Programación entera: Bifurcación y planos de corte.

Objetivos del tema:

- ☐ Introducir las principales técnicas de programación entera
- ☐ Introducir el método de bifurcación y acotación (Brach and Bound, B&B) para problemas de Programación Entera
- ☐ Analizar las diferentes estrategias que pueden utilizarse en cada una de las etapas del algoritmo B&B
- ☐ Utilizar el algoritmo B&B para resolver algunos problemas de Programación Lineal Entera Puros, Mixtos y Binarios
- ☐ Presentar algunas de las técnicas de preprocesamiento para problemas de Programación Lineal Entera Binaria
- ☐ Presentar un procedimiento para la generación de planos de corte en problemas de Programación Lineal Entera Binarios
- ☐ Introducir el método de los planos de corte de Gomoroy para Programación Lineal Entera

Problemas de Programación Lineal Entera

Tal y como se vio en el Tema 2 en muchos problemas de programación lineal sólo tienen sentido aquellas soluciones de la región factible en las que todas o algunas de las variables de decisión toman valores enteros. Este tipo de problemas se denominan en general Problemas de Programación Lineal Entera (PPLE). En concreto:

- Si todas las variables del problema son enteras se habla de **PPLE Pura**.
- Si sólo algunas son enteras y las restantes son continuas se habla de **PPLE Mixta**.
- Si todas las variables enteras son binarias (0/1) el problema se denomina **PPLE Binaria**.

En ingeniería los problemas más frecuentes son los PPLE Mixta. Estos problemas proporcionan un marco de modelado flexible y eficiente para formular y resolver muchos problemas de ingeniería. Un PPLE Mixta general se formula en forma estándar como:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{sujeto a} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & x_j \in \mathbb{N} \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, I \quad ; \quad I \leq n \end{aligned}$$

Este tema se proporciona una introducción a los principales algoritmos para obtener la solución a este tipo de problemas. En concreto, se estudian los métodos siguientes:

- **Método de bifurcación y acotación:** La solución al PPLE original se obtiene resolviendo una secuencia ordenada de PPLs que se obtienen relajando las restricciones de integralidad y añadiendo restricciones adicionales.
- **Método de los planos de corte:** En esta técnica, se resuelve el problema original relajado en el que se incluyen restricciones adicionales, denominadas cortes de Gomory, que reducen la región factible sin excluir soluciones que cumplen las condiciones de integralidad.

Método de bifurcación y acotación para un PPLE Mixta.

El método de bifurcación y acotación (B&B, de Branch and Bound) resuelve un PPLE resolviendo una secuencia ordenada de PPLs que se obtienen relajando las restricciones de integralidad y añadiendo restricciones adicionales. El número de restricciones adicionales crece a medida que el método B&B progresa. Estas restricciones permiten separar la región factible en subregiones complementarias.

El método B&B establece inicialmente cotas inferior y superior del valor óptimo de la función objetivo. El mecanismo de bifurcación aumenta progresivamente el valor de la cota inferior y disminuye también progresivamente el valor de la cota superior. La diferencia entre estas cotas es una medida de la proximidad de la solución actual a la óptima, si ésta existe.

Al minimizar, se obtiene una cota inferior de la solución óptima relajando las restricciones de integralidad del PPLE inicial y resolviendo el PPL resultante. Además, el valor de la función objetivo para cualquier solución del PPLE original es una cota superior de la solución óptima. De manera análoga, al maximizar, la solución del PPL relajado es una cota superior para el óptimo y cualquier solución del PPLE original es una cota inferior de la solución óptima.

A continuación se enumeran los pasos del algoritmo B&B para un PPLE Mixta:

Paso 1: Iniciación

- 1.1 Se establece una cota superior (∞) y una cota inferior ($-\infty$) de la solución óptima.
- 1.2 Se resuelve el PPLE Mixta inicial relajando las restricciones de integralidad.
 - 1.2.a Si el problema relajado es infactible, el original también lo es y no hay solución.
 - 1.2.b Si la solución obtenida satisface las condiciones de integralidad, es óptima.
 - 1.2.c En cualquier otro caso, se actualiza el valor de la cota correspondiente con el valor de la función objetivo resultante.

Paso 2: Bifurcación

- 2.1 Empleando la variable x_k que ha de ser entera y no lo es, se generan mediante bifurcación dos problemas. Si el valor de la variable que ha de ser entera x_k es $a.b$, donde a y b son sus partes entera y fraccional respectivamente, los problemas fruto de la bifurcación son los siguientes.
 - 2.1.a El primer problema es el PPLE relajado al que se le añade la restricción $x_k \leq a$
 - 2.1.b El segundo es el PPLE relajado al que se le añade la restricción $x_k \geq a+1$
- 2.2 Estos problemas se colocan ordenadamente en una lista de problemas a procesar que son resueltos secuencialmente o en paralelo. Obsérvese que la técnica de bifurcación propuesta cubre completamente el espacio de soluciones.

Paso 3: Solución

- 3.1 Se resuelve el siguiente problema en la lista de problemas a procesar.

Paso 4: Acotación

- 4.1 Si la solución del problema actual satisface las condiciones de integralidad y el valor óptimo de su función objetivo es menor que la cota superior actual, dicha cota se actualiza al valor óptimo de la función objetivo del problema resuelto, y el minimizador actual se almacena como el mejor candidato a minimizador del problema original. En caso de maximizaciones, la cota inferior actual se actualiza al valor óptimo de la función objetivo del problema resuelto si éste es menor que dicha cota inferior.
- 4.2 Si, por el contrario, la solución obtenida no satisface las restricciones de integralidad y el valor de la correspondiente función objetivo esta entre las cotas inferior y superior, se actualiza el valor de la cota inferior al valor de la función objetivo del problema resuelto y se procede a bifurcar de nuevo. En caso de maximizaciones, se actualiza el valor de la cota superior al valor de la función objetivo del problema resuelto y se procede a bifurcar de nuevo.
- 4.3 Los problemas generados en el proceso de bifurcación se añaden a la lista de problemas que han de resolverse.

Paso 5: Poda

- 5.1 *Poda por cotas:* Tiene lugar si la solución no satisface las condiciones de integralidad y además el valor de la función objetivo del problema resuelto es mayor que la cota superior para minimizaciones o menor que la cota inferior para maximizaciones. En este caso no es posible obtener soluciones mediante bifurcaciones adicionales de esa rama.
- 5.2 *Poda por infactibilidad:* Tiene lugar si el problema es infactible.
- 5.3 *Poda por integralidad:* Tiene lugar si la solución del problema actual cumple las restricciones de integralidad.

Paso 6: Optimalidad

- 6.1 Si la lista de problemas a procesar no está vacía, se continua con el paso 3.
- 6.2 Si la lista de problemas a procesar está vacía, el procedimiento concluye.
- 6.3 Concluido el problema, si existe un candidato a minimizador, dicho candidato es el minimizador; en caso contrario, el problema es infactible.

El algoritmo de B&B devuelve la solución óptima o notifica la infactibilidad bien en el paso 1 ó en el paso 6. El proceso de bifurcación concluye por la poda de la rama correspondiente como consecuencia de una de las tres razones siguientes:

1. La solución del problema relajado es mayor que la cota superior disponible en el caso de minimizaciones, o menor que la cota inferior disponible para el caso de maximizaciones.
2. El problema considerado es infactible.
3. La solución obtenida satisface las condiciones de integralidad.

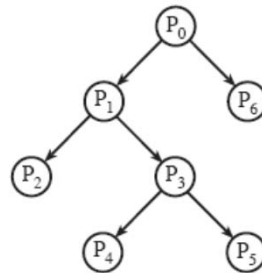
Como puede verse, los **pasos centrales** del algoritmo B&B son la **bifurcación**, la **acotación** y la **poda**. La diferencia entre un algoritmo B&B u otro radica en las diferentes estrategias que pueden llevarse a cabo a la hora de implementar tales pasos.

Estrategias de bifurcación y procesamiento

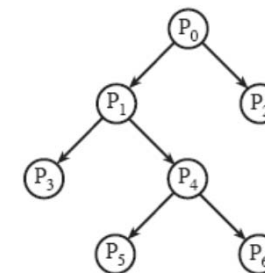
Cualquier variable que deba ser entera pero que no lo sea en la solución actual, es una variable candidata para bifurcación. Cuál escoger no es una cuestión trivial, y su respuesta ha de basarse en la estructura del problema.

Los problemas almacenados para ser procesados pueden tratarse mediante estrategias en profundidad, en anchura o mixtas. La siguiente figura ilustra las dos primeras alternativas. Normalmente el conocimiento técnico del problema permite establecer el tipo de estrategia a utilizar.

Búsqueda en profundidad



Búsqueda en anchura



- Una estrategia de **procesado en profundidad** origina rápidamente problemas fuertemente restringidos que producen buenas cotas superiores e inferiores. De esta forma, da lugar a problemas infactibles y, por tanto, a una deseable eliminación de ramas.
- Por el contrario, una **estrategia en anchura** permite tratar problemas muy similares, de lo que pueden desprenderse ventajas computacionales como es la reoptimización eficiente del problema relajado actual partiendo de la solución del anterior.

Estrategias de acotación

La acotación es normalmente llevada a cabo mediante la denominada **relajación lineal**, consistente en la obtención de la cota a partir de la resolución del PPL obtenido relajando las restricciones de integralidad del PPLE original.

Sin embargo, existen otras posibles relajaciones del PPLE original, como la **relajación Lagrangiana** en la que todo el conjunto de restricciones ($\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ en notación matricial) es eliminado y la función objetivo del problema *Maximizar* $\mathbf{z} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ es reemplazada por *Maximizar* $\mathbf{z}_R = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \lambda(\mathbf{Ax} - \mathbf{b})$, donde $\lambda \geq 0$ es un vector fijo.

Si $\mathbf{x}^*$ es una solución óptima del problema original $\mathbf{z} \leq \mathbf{z}_R$, por lo que resolviendo la relajación Lagrangiana el valor óptimo de $\mathbf{z}_R$ proporciona una cota válida para el problema original. Escogiendo adecuadamente el valor del vector λ dicha cota tiende a ser similar a la proporcionada por la solución de la relajación lineal, pero con la ventaja de que sin las restricciones del problema la resolución de la relajación Lagrangiana puede llegar a ser mucho más rápida.

En contrapartida, la poda llevada a cabo tras la acotación mediante la relajación Lagrangiana no suele ser tan potente como la llevada a cabo tras la relajación lineal. En general, dos son los factores deseables a la hora de escoger una u otra estrategia de acotación: (a) una rápida resolución del problema relajado; y (b) la obtención de una buena cota. En general, la **relajación lineal** suele ofrecer un buen compromiso entre ambos factores.

Estrategias de poda

Como se ha comentado anteriormente, la poda de la rama correspondiente tiene lugar por una de las tres razones siguientes:

1. La solución del problema relajado es mayor que la cota superior disponible en el caso de minimizaciones, o menor que la cota inferior disponible para el caso de maximizaciones.
2. El problema considerado es infactible.
3. La solución obtenida satisface las condiciones de integralidad.

En cuanto al punto 1 puede optarse por convertir el problema a la forma estándar de maximización (tal y como se vio en el Tema 4) y podar siempre que la solución del problema relajado sea inferior al óptimo actual.

En cuanto al punto 3, si el problema relajado y el subproblema generado mediante bifurcación tan sólo difieren en la falta de alguna restricción, la poda puede simplemente basarse en comprobar si la solución óptima de dicha relajación es una solución factible para el subproblema, ya que en este caso dicha solución también será óptima para este subproblema.

Ejemplo 1: Método B&B para un PPLE Pura

Sea el siguiente PPLE Pura:

$$\begin{array}{lll} \text{Minimizar} & z = & -x_1 - x_2 \\ \text{sujeto a} & -x_1 & \leq 0 \\ & 2x_1 - 2x_2 & \leq 1 \\ & 2x_2 & \leq 9 \\ & x_1, x_2 & \in \mathbb{N} \end{array}$$

Se trata de obtener su solución mediante el método de B&B.

Solución: Método B&B para un PPLE Pura

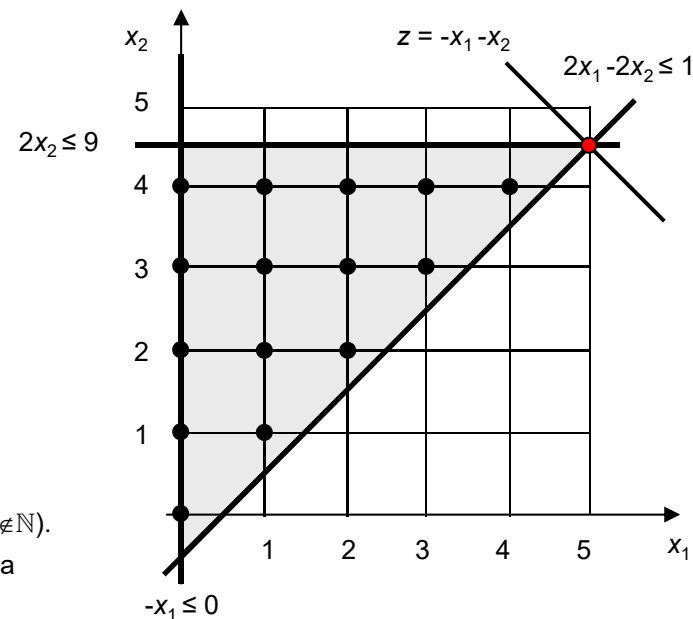
Paso 1: Iniciación

- 1.1 La cota superior inicial es $+\infty$ y la inferior $-\infty$.
1.2 El problema relajado, denominado P0, es el siguiente:

$$\begin{array}{lll} \text{Minimizar} & z = & -x_1 - x_2 \\ \text{sujeto a} & -x_1 & \leq 0 \\ & 2x_1 - 2x_2 & \leq 1 \\ & 2x_2 & \leq 9 \end{array}$$

Solución: $z = -9.5$ para el punto $(x_1=5, x_2=4.5)$

- 1.2c Esta solución no satisface las condiciones de integralidad ($x_2 \notin \mathbb{N}$).
Así, el valor de la función objetivo se emplea para actualizar la cota inferior de $-\infty$ a -9.5



Solución: Método B&B para un PPLE Pura (continuación 1)

Paso 2: Bifurcación

- 2.1 La variable que ha de ser entera x_2 , mediante bifurcación da lugar a los dos problemas siguientes:

Problema P1

Minimizar $z = -x_1 - x_2$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a} \quad & -x_1 \leq 0 \\ & 2x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ & 2x_2 \leq 9 \\ & x_2 \leq 4 \end{aligned}$$

Problema P2

Minimizar $z = -x_1 - x_2$

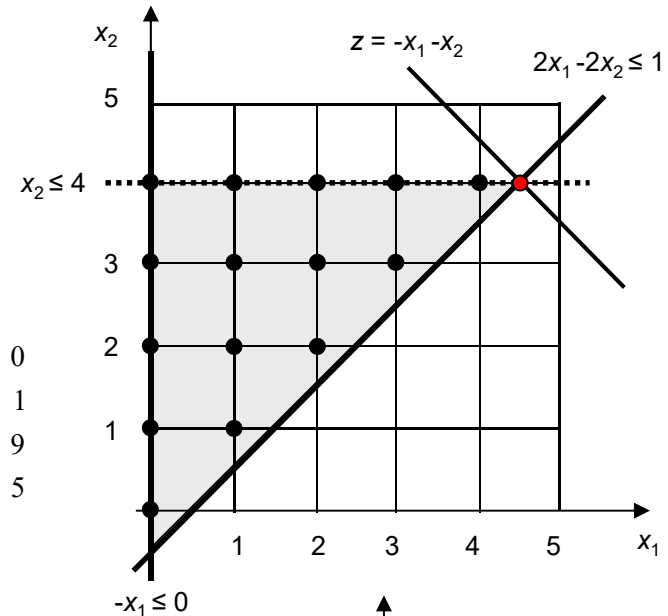
$$\begin{aligned} \text{sujeto a} \quad & -x_1 \leq 0 \\ & 2x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ & 2x_2 \leq 9 \\ & x_2 \geq 5 \end{aligned}$$

- 2.2 Estos problemas se colocan en la lista de problemas a procesar.

Paso 3: Solución

- 3.1 Se resuelve el problema P1

Solución: $z = -8.5$ para el punto $(x_1=4.5, x_2=4)$



Paso 4: Acotación

- 4.2 Puesto que la solución obtenida no satisface las condiciones de integralidad ($x_1 \notin \mathbb{N}$), y que el valor de la función objetivo ($z=-8.5$) está entre los valores de las cotas inferior y superior, el valor actual de la cota inferior se actualiza de -9.5 a -8.5 (la solución óptima está por tanto entre -8.5 y ∞).

El problema se vuelve a bifurcar. Para ello, la variable que deber ser entera pero no lo es (x_1), mediante bifurcación da lugar a los dos problemas P3 y P4 que incluyen las restricciones adicionales son $x_1 \leq 4$ y $x_1 \geq 5$ respectivamente.

- 4.3 Los problemas generados en el proceso de bifurcación se añaden a la lista de problemas que han de resolverse.

Solución: Método B&B para un PPLE Pura (continuación 2)

Problema P3

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = -x_1 - x_2 \\ \text{sujeto a} & -x_1 \leq 0 \\ & 2x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ & 2x_2 \leq 9 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1 \leq 4 \end{array}$$

Problema P4

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = -x_1 - x_2 \\ \text{sujeto a} & -x_1 \leq 0 \\ & 2x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ & 2x_2 \leq 9 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 5 \end{array}$$

Paso 5: Poda (No ocurre nada en este paso)

Paso 6: Control de optimalidad

6.1 Puesto que la lista de problemas a procesar no está vacía, se continúa con el problema P2 en el paso 3.

Paso 3: Solución (El problema P2 es infactible; por tanto, nada tiene lugar en este paso)

Paso 4: Acotación (No ocurre nada en este paso)

Paso 5: Poda

5.2 Puesto que el problema P2 es infactible, la rama correspondiente se poda por infactibilidad.

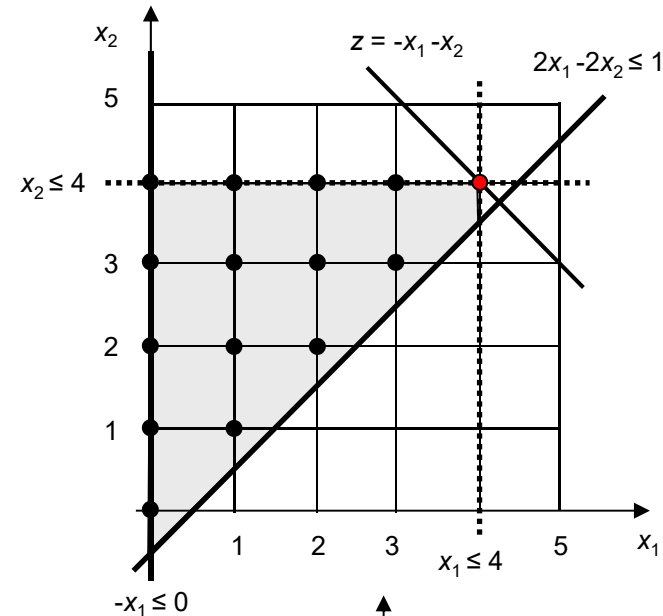
Paso 6: Control de optimalidad

6.1 Puesto que la lista de problemas no está vacía, se continúa con el problema P3 en el paso 3.

Paso 3: Solución

3.1 Se resuelve el problema P3

Solución: $z = -8$ para el punto $(x_1=4, x_2=4)$



Solución: Método B&B para un PPLE Pura (continuación 3)

Paso 4: Acotación

- 4.1 Puesto que la solución obtenida cumple las condiciones de integralidad ($x_1, x_2 \in \mathbb{N}$), y el valor de la función objetivo (-8) está entre las cotas inferior y superior, el valor de la cota superior se actualiza de $+\infty$ a -8 , y el minimizador obtenido se almacena como mejor candidato a minimizador del problema original.

Paso 5: Poda

- 5.3 Puesto que la solución actual satisface las condiciones de integralidad, no procede bifurcar adicionalmente, y la rama se poda.

Paso 6: Control de optimalidad

- 6.1 Puesto que la lista de problemas a procesar no está vacía, se continúa con el problema P4 en el paso 3.

Paso 3: Solución (El problema P4 es infactible, por tanto, no tiene lugar nada en este paso)

Paso 4: Acotación (No ocurre nada en este paso)

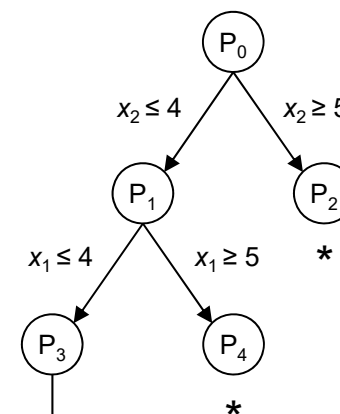
Paso 5: Poda

- 5.2 Puesto que el problema P4 es infactible, la rama correspondiente se poda por infactibilidad.

Paso 6: Control de optimalidad

- 6.2 Puesto que la lista de problemas a procesar está vacía, el procedimiento concluye.
- 6.3 Concluido el proceso, como hay un candidato a minimizador, este candidato es la solución del problema original:

Solución: $z = -8$ para el punto $(x_1=4, x_2=4)$



* No es posible otra bifurcación

Ejemplo 2: Método B&B para un PPLE Mixta

Sea el siguiente PPLE Mixta:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 - 2x_2 + x_3 = \frac{5}{2} \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = \frac{3}{2} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ & x_2, x_3 \in \mathbb{N} \end{array}$$

Se trata de obtener su solución mediante el método de B&B.

Solución: Método B&B para un PPLE Mixta

Paso 1: Iniciación

- 1.1 La cota superior inicial es $+\infty$ y la inferior $-\infty$.
- 1.2 El problema relajado, denominado P0, es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 - 2x_2 + x_3 = \frac{5}{2} \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = \frac{3}{2} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Solución: $z = 0$ para el punto $(x_1=0, x_2=0, x_3=2.5, x_4=1.5)$

- 1.2c Esta solución no satisface las condiciones de integralidad ($x_3 \notin \mathbb{N}$).
Así, el valor de la función objetivo se emplea para actualizar la cota inferior de $-\infty$ a 0

Solución: Método B&B para un PPLE Mixta (continuación 1)

Paso 2: Bifurcación

2.1 La variable que ha de ser entera x_3 , mediante bifurcación da lugar a los dos problemas siguientes:

Problema P1

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a } x_1 - 2x_2 + x_3 &= \frac{5}{2} \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= \frac{3}{2} \\ x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Problema P2

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a } x_1 - 2x_2 + x_3 &= \frac{5}{2} \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= \frac{3}{2} \\ x_3 &\geq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

2.2 Estos problemas se colocan en la lista de problemas a procesar.

Paso 3: Solución

3.1 Se resuelve el problema P1

Solución: $z = 1.5$ para el punto $(x_1=0.5, x_2=0, x_3=2, x_4=0.5)$

Paso 4: Acotación

4.1 Puesto que la solución obtenida satisface las condiciones de integralidad ($x_2, x_3 \in \mathbb{N}$), y que el valor de la función objetivo ($z=1.5$) es menor que el valor actual de la cota superior, ésta se actualiza de ∞ a 1.5 (la solución óptima está por tanto entre 0 y 1.5), y el minimizador encontrado se almacena como mejor candidato a minimizador del problema original.

Paso 5: Poda

5.3 Puesto que la solución actual satisface las condiciones de integralidad (para x_2 y x_3), la rama se poda y se continua con el paso 3.

Paso 3: Solución

3.1 Se resuelve el problema P2. Solución: $z = 0.5$ para el punto $(x_1=0, x_2=0.25, x_3=3, x_4=1.25)$

Solución: Método B&B para un PPLE Mixta (continuación 2)

Paso 4: Acotación

4.2 Puesto que esta solución no satisface las condiciones de integralidad ($x_2 \notin \mathbb{N}$) y el valor correspondiente de la función objetivo (0.5) está entre las cotas interior y superior, la cota inferior se actualiza de 0 a 0.5 (la solución óptima está por tanto entre 0.5 y 1.5).

A continuación se procede a bifurcar sobre la variable x_2 , lo que da lugar a los dos problemas siguientes:

Problema P3

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 - 2x_2 + x_3 = \frac{5}{2} \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = \frac{3}{2} \\ & x_3 \geq 3 \\ & x_2 \leq 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Problema P4

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 - 2x_2 + x_3 = \frac{5}{2} \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = \frac{3}{2} \\ & x_3 \geq 3 \\ & x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

4.3 Los problemas generados en el proceso de bifurcación se añaden a la lista de problemas que han de resolverse.

Paso 5: Poda (No ocurre nada en este paso)

Paso 6: Control de optimalidad

6.1 Puesto que la lista de problemas a procesar no está vacía, se continúa con el problema P3 en el paso 3.

Paso 3: Solución (El problema P3 es infactible; por tanto, nada tiene lugar en este paso)

Paso 4: Acotación (No ocurre nada en este paso)

Paso 5: Poda

5.2 Puesto que el problema P3 es infactible, la rama correspondiente se poda por infactibilidad.

Solución: Método B&B para un PPLE Mixta (continuación 3)

Paso 6: Control de optimalidad

6.1 Puesto que la lista de problemas no está vacía, se continúa con el problema P4 en el paso 3.

Paso 3: Solución

3.1 Se resuelve el problema P4

Solución: $z = 2$ para el punto $(x_1=0, x_2=1, x_3=4.5, x_4=0.5)$

Paso 4: Acotación (No ocurre nada en este paso)

Paso 5: Poda

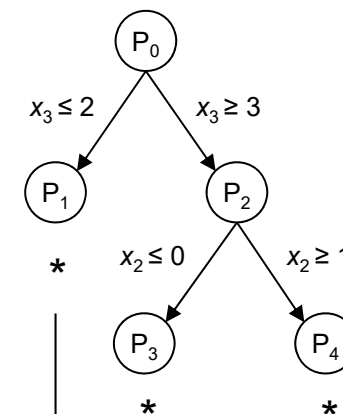
5.1 Puesto que la solución obtenida no satisface las condiciones de integralidad ($x_3 \notin \mathbb{N}$), y el valor correspondiente de la función objetivo es mayor que el valor actual de la cota superior, no podrá lograrse una mejor solución que la disponible llevando a cabo bifurcaciones adicionales. Así, la rama se poda por cotas.

Paso 6: Control de optimalidad

6.2 Puesto que la lista de problemas a procesar está vacía, el procedimiento concluye.

6.3 Concluido el proceso, como hay un candidato a minimizador, este candidato es la solución del problema original:

Solución: $z = 1.5$ para el punto $(x_1=0.5, x_2=0, x_3=2, x_4=0.5)$



* No es posible otra bifurcación

Ejemplo 3: Método B&B para un PPLE Binaria

Obtener la solución mediante el método de B&B del PPLE Binaria mostrado en la transparencia 5 del Tema 2 pero con los datos de la siguiente tabla. Además, el capital total para la inversión es de 10 M euros.

Decisiones	Beneficio estimado	Capital requerido
Instalar factoría en Zaragoza	9 M euros	6 M euros
Instalar factoría en Sevilla	5 M euros	3 M euros
Construir almacén en Zaragoza	6 M euros	5 M euros
Construir almacén en Sevilla	4 M euros	2 M euros



$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar } z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\
 &\text{sujeto a } \begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 &\leq 10 \\ x_3 + x_4 &\leq 1 \\ -x_1 + x_3 &\leq 0 \\ -x_2 + x_4 &\leq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\in \{0,1\} \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Solución: Método B&B para un PPLE Binaria

Paso 1: Iniciación

- 1.1 La cota superior inicial es $+\infty$ y la inferior $-\infty$.
- 1.2 El problema relajado, denominado P0, es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar } z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\
 &\text{sujeto a } \begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 &\leq 10 \\ x_3 + x_4 &\leq 1 \\ -x_1 + x_3 &\leq 0 \\ -x_2 + x_4 &\leq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\in [0,1] \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Solución: $z = 16.5$ para el punto $(x_1=5/6, x_2=1, x_3=0, x_4=1)$

- 1.2c Esta solución no satisface las condiciones de integralidad ($x_1 \notin \{0,1\}$).
Así, el valor de la función objetivo se emplea para actualizar la cota superior de ∞ a 16.5

```

//Variables de decisión
dvar int x1 in 0..1;
dvar int x2 in 0..1;
dvar int x3 in 0..1;
dvar int x4 in 0..1;

//Función objetivo
maximize 9*x1 + 5*x2 + 6*x3 + 4*x4;

//Restricciones
subject to {
    6*x1 + 3*x2 + 5*x3 + 2*x4 <= 10;
    x3 + x4 <= 1;
    -x1 + x3 <= 0;
    -x2 + x4 <= 0;
}

```

```

solution (optimal) with objective 14:
x1 = 1;
x2 = 1;
x3 = 0;
x4 = 0;

```

Solución: Método B&B para un PPLE Binaria (continuación 1)

Paso 2: Bifurcación

2.1 La variable que ha de ser binaria x_1 , mediante bifurcación da lugar a los dos problemas siguientes:

Problema P1 ($x_1=0$)

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } z &= 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\ \text{sujeto a } 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 &\leq 10 \\ x_3 + x_4 &\leq 1 \\ x_3 &\leq 0 \\ -x_2 + x_4 &\leq 0 \\ x_2, x_3, x_4 &\in [0,1] \end{aligned}$$

Problema P2 ($x_1=1$)

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } z &= 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 9 \\ \text{sujeto a } 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 &\leq 4 \\ x_3 + x_4 &\leq 1 \\ x_3 &\leq 1 \\ -x_2 + x_4 &\leq 0 \\ x_2, x_3, x_4 &\in [0,1] \end{aligned}$$

2.2 Estos problemas se colocan en la lista de problemas a procesar.

Paso 3: Solución

3.1 Se resuelve el problema P1

Solución: $z = 9$ para el punto ($x_1=0, x_2=1, x_3=0, x_4=1$)

Paso 4: Acotación

4.1 Puesto que la solución obtenida satisface las condiciones de integralidad ($x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}$), y que el valor de la función objetivo ($z=9$) es mayor que el valor actual de la cota inferior, ésta se actualiza de $-\infty$ a 9 (la solución óptima está por tanto entre 9 y 16.5), y el maximizador encontrado se almacena como mejor candidato a maximizador del problema original.

Paso 5: Poda

5.3 Puesto que la solución actual satisface las condiciones de integralidad ($x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}$), la rama se poda por integralidad y se continua con el paso 3.

Solución: Método B&B para un PPLE Binaria (continuación 2)

Paso 3: Solución

3.1 Se resuelve el problema P2

Solución: $z = 16.2$ para el punto $(x_1=1, x_2=4/5, x_3=0, x_4=4/5)$

Paso 4: Acotación

4.2 Puesto que esta solución no satisface las condiciones de integralidad ($x_2, x_4 \notin \{0,1\}$) y el valor correspondiente de la función objetivo (16.2) está entre las cotas interior y superior, la cota superior se actualiza de 16.5 a 16.2 (la solución óptima está ahora por tanto entre 9 y 16.2).

A continuación se procede a bifurcar sobre la variable x_2 , lo que da lugar a los dos problemas siguientes:

Problema P3 ($x_1=1, x_2=0$)

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z = 6x_3 + 4x_4 + 9 \\ \text{sujeto a} & 5x_3 + 2x_4 \leq 4 \\ & x_3 + x_4 \leq 1 \\ & x_3 \leq 0 \\ & x_4 \leq 0 \\ & x_3, x_4 \in [0,1] \end{array}$$

Problema P4 ($x_1=1, x_2=1$)

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z = 6x_3 + 4x_4 + 14 \\ \text{sujeto a} & 5x_3 + 2x_4 \leq 1 \\ & x_3 + x_4 \leq 1 \\ & x_3 \leq 1 \\ & x_4 \leq 1 \\ & x_3, x_4 \in [0,1] \end{array}$$

4.3 Los problemas generados en el proceso de bifurcación se añaden a la lista de problemas que han de resolverse.

Paso 5: Poda (No ocurre nada en este paso)

Paso 6: Control de optimalidad

6.1 Puesto que la lista de problemas a procesar no está vacía, se continúa con el problema P3 en el paso 3.

Solución: Método B&B para un PPLE Binaria (continuación 3)

Paso 3: Solución

3.1 Se resuelve el problema P3 Solución: $z = 13$ para el punto $(x_1=1, x_2=0, x_3=4/5, x_4=0)$

Paso 4: Acotación (En este caso, antes de acotar y bifurcar resolveremos P4, adoptando por tanto una estrategia en anchura)

Paso 5: Poda (No ocurre nada en este paso)

Paso 6: Control de optimalidad

6.1 Puesto que la lista de problemas a procesar no está vacía, se continúa con el problema P4 en el paso 3.

Paso 3: Solución

3.1 Se resuelve el problema P4 Solución: $z = 16$ para el punto $(x_1=1, x_2=1, x_3=0, x_4=0.5)$

Paso 4: Acotación

4.2 Ni P3 ni P4 satisfacen las condiciones de integralidad. Como la solución del problema P4 genera una cota superior a la proporcionada por la solución del problema P3, se continua acotando desde P4. Puesto que su solución no satisface las condiciones de integralidad ($x_4 \notin \{0,1\}$) y el valor correspondiente de la función objetivo (16) está entre las cotas interior y superior, la cota superior se actualiza de 16.2 a 16 (la solución óptima está ahora por tanto entre 9 y 16).

A continuación se procede a bifurcar sobre la variable x_3 desde el problema P4, lo que da lugar a los dos problemas siguientes:

Problema P5 ($x_1=1, x_2=1, x_3=0$)

Maximizar $z = 4x_4 + 14$
sujeto a $2x_4 \leq 1$
 $x_4 \in [0,1]$

Problema P6 ($x_1=1, x_2=1, x_3=1$)

Maximizar $z = 4x_4 + 20$
sujeto a $x_4 \leq 0$
 $x_4 \in [0,1]$

4.3 Los problemas generados en el proceso de bifurcación se añaden a la lista de problemas que han de resolverse.

Solución: Método B&B para un PPLE Binaria (continuación 4)

Paso 3: Solución

3.1 Se resuelve el problema P5

Solución: $z = 16$ para el punto $(x_1=1, x_2=1, x_3=1, x_4=0.5)$

Paso 4: Acotación (No ocurre nada en este paso, al igual que en el caso anterior, se espera a resolver P6)

Paso 5: Poda (No ocurre nada en este paso)

Paso 6: Control de optimalidad

6.1 Puesto que la lista de problemas a procesar no está vacía, se continúa con el problema P6 en el paso 3.

Paso 3: Solución (El problema P6 es infactible; por tanto, nada tiene lugar en este paso)

Paso 4: Acotación (No ocurre nada en este paso)

Paso 5: Poda

5.2 Puesto que el problema P6 es infactible, la rama correspondiente se poda por infactibilidad.

Paso 6: Control de optimalidad

6.1 Puesto aún están pendientes las bifurcaciones de los problemas P3 y P5, la lista de problemas a procesar no estará vacía tras las bifurcaciones correspondientes.

Dado que el nodo P5 se ha creado más recientemente que el P3, y por tanto la resolución de los problemas obtenidos tras la bifurcación será más eficiente que la de los asociados a P3, se continua bifurcando P5 en el paso 2.

Solución: Método B&B para un PPLE Binaria (continuación 5)

Paso 2: Bifurcación

2.1 La variable que ha de ser binaria x_4 , mediante bifurcación da lugar a los dos problemas siguientes:

Problema P7 (P5 con $x_4=0$)

Problema P8 (P5 con $x_4=1$)

Solución: $z = 14$ para el punto $(x_1=1, x_2=1, x_3=0, x_4=0)$

Solución: No es factible

Paso 4: Acotación

4.1 Puesto que la solución de P7 satisface las condiciones de integralidad ($x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}$), y que el valor de la función objetivo ($z=14$) es mayor que el valor actual de la cota inferior, ésta se actualiza de 9 a 14 (la solución óptima está por tanto entre 14 y 16), y el maximizador encontrado se almacena como mejor candidato a maximizador del problema original.

Paso 5: Poda

5.3 Puesto que la solución de P7 satisface las condiciones de integralidad ($x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}$), la rama se poda por integralidad.

5.2 Puesto que el problema P8 es infactible, la rama correspondiente se poda por infactibilidad.

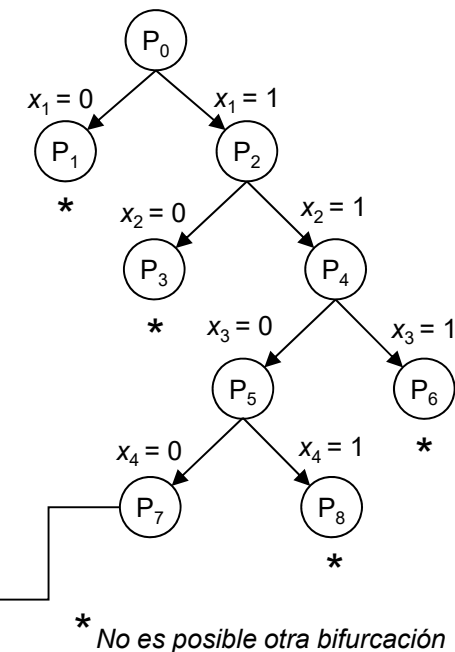
5.1 Puesto que P3 no satisface las condiciones de integralidad y además el valor de su función objetivo (13) es menor que la cota superior (14), no es posible obtener soluciones mediante bifurcaciones adicionales de esa rama, y por tanto se poda por cotas.

Paso 6: Control de optimalidad

6.2 Puesto que la lista de problemas a procesar está vacía, el procedimiento concluye.

6.3 Concluido el proceso, como hay un candidato a maximizador, este candidato es la solución del problema original:

Solución: $z = 14$ para el punto $(x_1=1, x_2=1, x_3=0, x_4=0)$



Técnicas de preprocesamiento para PPLE Binarios

En la mayoría de las ocasiones, la formulación del PPLE Binario proporcionado por el usuario puede ser inspeccionada con el fin de reformular dicho problema de tal forma que su solución sea mucho más rápida sin eliminar ninguna región factible. Dicha reformulación del problema original se basa en las tres técnicas siguientes:

1. *Fijado de variables*: Consiste en identificar aquellas variables cuyo valor puede fijarse a uno de sus posibles valores (0 ó 1) debido a que para el otro valor la solución no es ni óptima ni factible.
2. *Eliminación de restricciones redundantes*: Consiste en identificar aquellas restricciones que ya están automáticamente incluidas en otras para eliminarlas.
3. *Estrechamiento de restricciones*: También llamado reducción de coeficientes, consiste en endurecer ciertas restricciones con el fin de reducir la región factible del problema relajado sin eliminar ninguna solución factible del PPLE Binario original.

1. *Fijado de variables*

Si un valor de una determinada variable no puede satisfacer una restricción incluso cuando el resto de variables utilizan sus mejores valores para satisfacerla, entonces el valor de dicha variable debe ser fijado a su otro valor.

Por ejemplo, para las siguientes restricciones $\leq$ se puede fijar el valor de la variable x_1 a 0, ya que para $x_1=1$ las restricciones no son satisfechas aún en el caso de utilizar los mejores valores (0 para una variable con coeficiente no negativo y 1 para una variable con coeficiente negativo) para el resto de variables:

$$\begin{array}{llllll} 3x_1 \leq 2 & \Rightarrow & x_1 = 0 & \text{ya que} & 3(1) > 2 \\ 3x_1 + x_2 \leq 2 & \Rightarrow & x_1 = 0 & \text{ya que} & 3(1) + 1(0) > 2 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 2 & \Rightarrow & x_1 = 0 & \text{ya que} & 5(1) + 1(0) - 2(1) > 2 \end{array}$$

El procedimiento general para chequear cualquier restricción $\leq$ consiste en identificar la variable con el mayor coeficiente positivo, y si la suma de dicho coeficiente con el resto de coeficientes negativos es superior al término independiente situado al lado derecho de la restricción, entonces el valor de dicha variable debe fijarse a 0. A continuación, el procedimiento debe repetirse para la siguiente variable con el mayor coeficiente positivo, etc...

Un procedimiento análogo puede utilizarse para fijar el valor de una variable a 1 en el caso de restricciones $\geq$, como se muestra a continuación para la variable x_1 :

$$\begin{array}{llllll} 3x_1 \geq 2 & \Rightarrow & x_1 = 1 & \text{ya que} & 3(0) < 2 \\ 3x_1 + x_2 \geq 2 & \Rightarrow & x_1 = 1 & \text{ya que} & 3(0) + 1(1) < 2 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 2 & \Rightarrow & x_1 = 1 & \text{ya que} & 5(0) + 1(1) - 2(0) < 2 \end{array}$$

Una restricción $\geq$ también nos puede permitir fijar el valor de una variable a 0, como se muestra a continuación:

$$x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0 \quad \text{ya que} \quad 1(1) + 1(1) - 2(1) < 1$$

A continuación se muestra otro ejemplo en el que una restricción $\geq$ nos permite fijar el valor de una variable a 1 y el de otra a 0:

$$\begin{array}{llllll} 3x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 2 & \Rightarrow & x_1 = 1 & \text{ya que} & 3(0) + 1(1) - 3(0) < 2 \\ & & y & x_3 = 0 & \text{ya que} & 3(1) + 1(1) - 3(1) < 2 \end{array}$$

Análogamente, una restricción $\leq$ con el término independiente del lado derecho negativo, permite fijar el valor de una variable a

$$\begin{array}{llllll} 3x_1 - 2x_2 \leq -1 & \Rightarrow & x_1 = 0 & \text{ya que} & 3(1) - 2(1) > -1 \\ & & y & x_2 = 1 & \text{ya que} & 3(0) - 2(0) > -1 \end{array}$$

A veces, fijar el valor de una variable en una restricción puede generar que se pueda fijar el valor de otras variables en otras restricciones. Por ejemplo, supóngase la siguiente restricción:

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad \text{ya que} \quad 3(0) + 1(1) - 2(0) < 2$$

que sobre $x_1 + x_4 + x_5 \leq 1$ da lugar a $x_4 = 0$ y $x_5 = 0$

y sobre $-x_5 + x_6 \leq 0$ da lugar a $x_6 = 0$

En algunas ocasiones, es posible combinar una o más restricciones mutuamente exclusivas junto con otra restricción para fijar el valor de alguna variable como en el ejemplo siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} 8x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 \leq 2 \\ x_2 + x_3 \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = 0 \quad \text{ya que} \quad 8(1) - \max\{4, 5\}(1) + 3(0) > 2$$

Para terminar, y sin entrar en más detalles, simplemente comentar que otras alternativas para el finado de variables que incluyen criterios de optimalidad, y que el fijado de variables puede llegar a tener un impacto dramático en la reducción del tamaño del problema pudiendo llegar al 50% o superior.

2. Eliminación de restricciones redundantes

Si una restricción funcional se satisface hasta para los peores valores de sus variables binarias, entonces es redundante y puede ser eliminada del modelo.

- Para una restricción $\leq$ los peores valores de sus variables binarias son 1 siempre y cuando sus coeficientes sean no negativos y 0 en caso contrario.
- Para una restricción $\geq$ los peores valores de sus variables binarias son 0 siempre y cuando sus coeficientes sean no negativos y 1 en caso contrario.

Estos son algunos ejemplos:

$$\begin{array}{llll} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 & \text{es redundante,} & \text{ya que} & 3(1) + 2(1) \leq 6 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 3 & \text{es redundante,} & \text{ya que} & 3(1) - 2(0) \leq 3 \\ 3x_1 - 2x_2 \geq -3 & \text{es redundante,} & \text{ya que} & 3(0) - 2(1) \geq -3 \end{array}$$

En la mayoría de los casos en los que una restricción resulta ser redundante, ésta no lo era en el modelo original, pero si en el modelos resultantes tras el fijado de variables. Como puede observarse, esto ocurre en la mayoría de los ejemplos de las dos transparencias anteriores.

3. Estrechamiento de restricciones

Considérese el problema siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \in \{0,1\} \end{array}$$

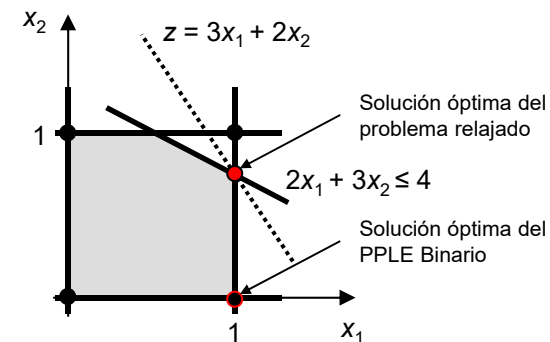
Problema relajado

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \in [0,1] \end{array}$$

Dicho problema tan solo tiene tres soluciones factibles, (0,0), (0,1) y (1,0), siendo (1,0) la óptima con un valor de $z=3$.

Sin embargo, como se muestra en la figura, la solución óptima del problema relajado es (1,2/3) con un valor de $z=4.33$, que no está demasiado cerca de la solución óptima del problema binario.

Así, el algoritmo B&B debería ejecutar varias iteraciones hasta identificar el óptimo del problema binario.

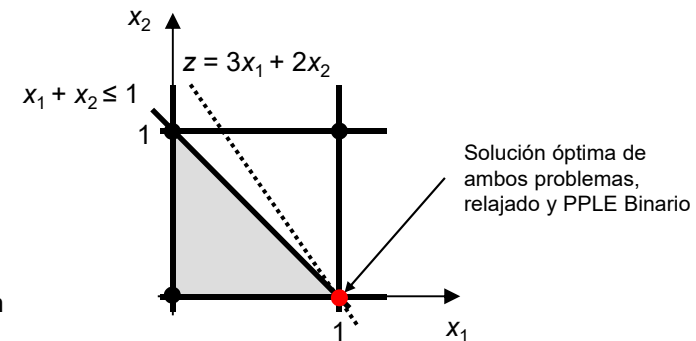


Nótese ahora qué ocurre cuando la restricción funcional del problema $2x_1 + 3x_2 \leq 4$ es sustituida por esta otra $x_1 + x_2 \leq 1$:

El problema binario permanece igual, con tres soluciones factibles, (0,0), (0,1) y (1,0), siendo (1,0) la óptima con un valor de $z=3$.

Sin embargo, la región factible del problema relajado se ha reducido sustancialmente hasta el punto de que su solución coincide con la del problema binario original sin necesidad de llevar a cabo ninguna iteración del algoritmo B&B.

Así, se ha conseguido reducir la región factible sin eliminar ninguna solución factible del problema binario original.



Procedimiento para el estrechamiento de restricciones

Como se ha visto en el ejemplo anterior, el método resulta bastante sencillo para dos variables, en donde la región factible es fácilmente visualizable de forma gráfica. Sin embargo, los mismos principios para la reducción de la región factible sin eliminar ninguna solución del problema binario original pueden aplicarse a un problema con cualquier número de variables siguiendo el procedimiento siguiente:

Sea la restricción $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b$:

1. Calcular $S = \sum_{j=1}^n a_j$
2. Identificar los $a_j \neq 0$ tal que $S < b + |a_j|$
 - (a) Si no hay ninguno, no es posible reducir la región factible.
 - (b) Si $a_j > 0$ continuar con el paso 3. Si $a_j < 0$ continuar con el paso 4.
3. Calcular $\bar{a}_j = S - b$ y $\bar{b} = S - a_j$, resetear $a_j = \bar{a}_j$ y $b = \bar{b}$ y volver al paso 1.
4. Incrementar a_j a $a_j = b - S$ y volver al paso 1.

Ejemplo: Apliquemos dicho procedimiento a la restricción $2x_1 + 3x_2 \leq 4$

1. $S=5$
2. Tanto a_1 como a_2 satisfacen la restricción del punto 2. Se toma a_1 arbitrariamente.
3. La nueva restricción estrechada resulta ser: $x_1 + 3x_2 \leq 3$
1. $S=4$
2. Tan solo a_2 satisface la restricción del punto 2.
3. La nueva restricción estrechada resulta ser: $x_1 + x_2 \leq 1$
1. $S=2$
2. Ningún a_j satisface la restricción del punto 2.

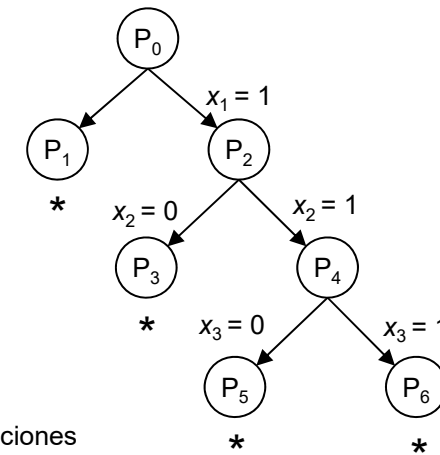
Generación de planos de corte para PPLE Binarios

Un **plano de corte** (o simplemente **corte**) para cualquier PPLE es una restricción funcional que reduzca la región factible de la relajación lineal del problema original sin eliminar ninguna de sus soluciones factibles. Así, por ejemplo, el método de estrechamiento de restricciones visto anteriormente puede considerarse como un método de generación de planos de corte para PPLE Binarios.

Adicionalmente, existen otra serie de técnicas para generar planos de corte que reduzcan la región factible acelerando el proceso mediante el cual el algoritmo B&B alcanza la solución óptima. A continuación se muestra una de tales técnicas para PPLE Binarios. Para ilustrar dicho método, considérese de nuevo el problema mostrado en el Ejemplo 3.

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\ \text{sujeto a} & 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ & -x_1 + x_3 \leq 0 \\ & -x_2 + x_4 \leq 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\} \end{array}$$

Algoritmo B&B con el plano de corte



Recuérdese que la solución de la relajación lineal asociada P0 es $z = 16.5$ para el punto $(x_1=5/6, x_2=1, x_3=0, x_4=1)$.

Como se verá en el procedimiento mostrado en la siguiente transparencia, la primera de las restricciones junto con el hecho de que las variables son binarias da lugar al siguiente plano de corte $x_1 + x_2 + x_4 \leq 2$

Nótese como dicho corte elimina parte de la región factible para el problema relajado P0 (incluida su solución óptima), pero no elimina ninguna de las soluciones enteras factibles del problema original. Así, simplemente añadiendo dicho plano de corte al modelo original, el rendimiento del algoritmo B&B mejora en los dos aspectos siguientes:

- En primer lugar, la solución óptima del nuevo problema relajado P0 resulta ser $z = 15.2$ para el punto $(x_1=1, x_2=1, x_3=0.2, x_4=0)$, por lo que la cota superior se actualiza de ∞ a 15.2 en lugar de a 16.5.
- En segundo lugar, se necesita una iteración menos del método B&B para alcanzar la solución óptima ya que la solución óptima del problema relajado P5 resulta ser $z = 14$ para el punto $(x_1=1, x_2=1, x_3=0, x_4=0)$, podándose por tanto dicha rama por integralidad. A continuación la rama correspondiente al nodo P3 se poda de nuevo debido al punto 5.1 resultando la solución de P5 el óptimo.

Procedimiento para la generación de un plano de corte en PPLE Binaria

1. Considérese cualquier restricción funcional del tipo $\leq$ con todos los coeficientes no negativos.
2. Encontrar el conjunto de variables (denominado **envoltura mínima** de la restricción) tal que:
 - (a) La restricción no se satisface si cada variable de la envoltura mínima vale 1 y el resto 0.
 - (b) Pero la restricción pasa a ser satisfecha si el valor de cualquier variable de la envoltura mínima pasa de valer 1 a valer 0.
3. Denotando N como el número de variables de la envoltura mínima, el **plano de corte** resultante tiene la forma $\sum_{x_i \in \text{envoltura mínima}} x_i \leq N - 1$

Ejemplo: Apliquemos dicho procedimiento a la restricción $6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10$

1. La restricción satisface el criterio especificado en el paso 1.
2. La envoltura mínima está formada por las variables (x_1, x_2, x_4) , ya que:
 - (a) $(1, 1, 0, 1)$ no satisface la restricción.
 - (b) Pero la restricción pasa a ser satisfecha si el valor de cualquiera de las variables (x_1, x_2, x_4) pasa de valer 1 a valer 0.
3. Puesto que $N=3$, el plano de corte resultante es $x_1 + x_2 + x_4 \leq 2$

Nótese que dicha restricción tiene una segunda envoltura mínima:

2. La envoltura mínima está formada por las variables (x_1, x_3) , ya que:
 - (a) $(1, 0, 1, 0)$ no satisface la restricción.
 - (b) Pero la restricción pasa a ser satisfecha si el valor de cualquiera de las variables (x_1, x_3) pasa de valer 1 a valer 0.
3. Puesto que $N=2$, el plano de corte resultante es $x_1 + x_3 \leq 1$

Método de los cortes de Gomory

Un método alternativo de solución de PPLE es el procedimiento de los **cortes de Gomory**. En esta técnica, se resuelve el problema original relajado en el que se incluyen restricciones adicionales, que reducen la región factible sin excluir soluciones que cumplen las condiciones de optimalidad. En cada iteración se añade una restricción que se denomina corte de Gomory. Este procedimiento genera progresivamente una envoltura convexa de la región factible, lo que origina soluciones que cumplen las condiciones de integralidad.

Generación de un corte

La región factible del problema original es $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, que empleando la partición estándar del simplex se escribe como:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Denotando por $\mathbf{U} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$ y $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x}_B + \mathbf{U}\mathbf{x}_N = \bar{\mathbf{b}}$

Sea $\mathbf{x}_B$ una variable básica que ha de ser entera pero no lo es.

La fila correspondiente a esta variable en la ecuación anterior es: $x_{B_i} + \sum_j u_{ij} x_{N_j} = \bar{b}_i$

Puesto que la solución obtenida es básica y factible, las variables x_{N_j} , que son no básicas, son cero; por tanto, $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{x}_B$, y puesto que x_{B_i} es no entera, $\bar{b}_i$ ha de ser no entera.

Por otra parte, cada elemento u_{ij} se puede expresar como suma de una parte entera (positiva, negativa o nula), e_{ij} , y una fracción no negativa menor que 1, f_{ij} :

$$u_{ij} = e_{ij} + f_{ij} \quad ; \quad \forall j$$

De forma análoga, $\bar{b}_i$ se puede descomponer como $\bar{b}_i = \bar{e}_i + \bar{f}_i$ donde $\bar{e}_i$ es un entero (positivo o negativo) y $\bar{f}_i$ una fracción no negativa menor que 1. Obsérvese que algunos f_{ij} pueden ser cero, pero $\bar{f}_i$ ha de ser positivo.

Sustituyendo $u_{ij} = e_{ij} + f_{ij}$; $\forall j$ y $\bar{b}_i = \bar{e}_i + \bar{f}_i$ en $x_{B_i} + \sum_j u_{ij} x_{N_j} = \bar{b}_i$, se obtiene:

$$x_{B_i} + \sum_j (e_{ij} + f_{ij}) x_{N_j} = \bar{e}_i + \bar{f}_i \quad \Rightarrow \quad x_{B_i} + \sum_j e_{ij} x_{N_j} - \bar{e}_i = \bar{f}_i - \sum_j f_{ij} x_{N_j}$$

En la ecuación anterior, el término de la izquierda ha de ser entero puesto que todas sus variables son enteras. Por tanto, el término de la derecha también será entero.

Por otra parte, tanto f_{ij} como x_{N_j} son no negativos para todo j , por tanto el término $\sum_j f_{ij} x_{N_j}$ es no negativo.

Finalmente, el término de la derecha de la ecuación precedente, $\bar{f}_i - \sum_j f_{ij} x_{N_j}$ es a la vez:

- entero, y
- menor que una fracción positiva, $\bar{f}_i$, menor que 1

y puesto que los enteros que satisfacen esa condición son $0, -1, -2, \dots$, entonces $\bar{f}_i - \sum_j f_{ij} x_{N_j}$ es un entero no positivo.

$$\text{Por tanto } \bar{f}_i - \sum_j f_{ij} x_{N_j} \leq 0 \quad \text{ó} \quad \sum_j f_{ij} x_{N_j} - \bar{f}_i \geq 0$$

Esta última desigualdad se denomina **corte de Gomory** asociado a la variable básica x_{B_i} que ha de ser entera pero no lo es.

A continuación se resumen las ecuaciones utilizadas en el método de los cortes de Gomoroy:

1. $U = B^{-1}N$ y $\bar{b} = B^{-1}b \Rightarrow x_B + Ux_N = \bar{b} \Rightarrow x_{B_i} + \sum_j u_{ij} x_{N_j} = \bar{b}_i$
2. $u_{ij} = e_{ij} + f_{ij}$; $\forall j$ y $\bar{b}_i = \bar{e}_i + \bar{f}_i$
3. $\bar{f}_i - \sum_j f_{ij} x_{N_j} \leq 0$

Algoritmo de los cortes de Gomoroy para un PPLE

A continuación se enumeran los pasos del algoritmo de los cortes de Gomoroy para un PPLE:

Paso 1: Iniciación

- 1.1 Se resuelve el problema original sin restricciones de integralidad.
 - 1.1.a Si la solución no está acotada, el problema original o no está acotado y se para.
 - 1.2.b Si el problema es infactible, el problema original también lo es y se para.
 - 1.2.c En cualquier otro caso, se continua con el paso siguiente.

Paso 2: Control de optimalidad

- 2.1 Si la solución obtenida cumple las condiciones de integralidad, se para dado que esta solución es óptima.
- 2.2 En cualquier otro caso, se continua con el paso siguiente.

Paso 3: Generación de un corte

- 3.1 Se emplea una variable básica que ha de ser entera pero no lo es para generar un corte de Gomory.

Paso 4: Resolución

- 4.1 Se añade el corte de Gomory obtenido al problema previamente resuelto, se resuelve el problema resultante y se continúa con el paso 2.

Deben además tenerse en cuenta los aspectos siguientes:

- Obsérvese que el número de restricciones crece con el número de iteraciones.
- Puesto que en cada iteración se añade una nueva restricción, debe emplearse para la resolución del problema el método simplex dual. Esto es así puesto que al añadir una nueva restricción, el problema primal correspondiente se hace infactible pero su dual permanece factible, aunque no óptimo.
- Por tanto, para resolver el nuevo problema puede partirse de la solución dual del problema previo (sin restricción adicional), lo que supone una ventaja computacional importante.

Ejemplo 4: Algoritmo de los cortes de Gomoroy

Sea el siguiente PPLE Pura:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } z &= 120x_1 + 80x_2 \\ \text{sujeto a } 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 7x_1 + 8x_2 &\leq 28 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Se trata de obtener su solución mediante el método de los cortes de Gomoroy.

Solución: Algoritmo de los cortes de Gomoroy

Paso 1: Iniciación

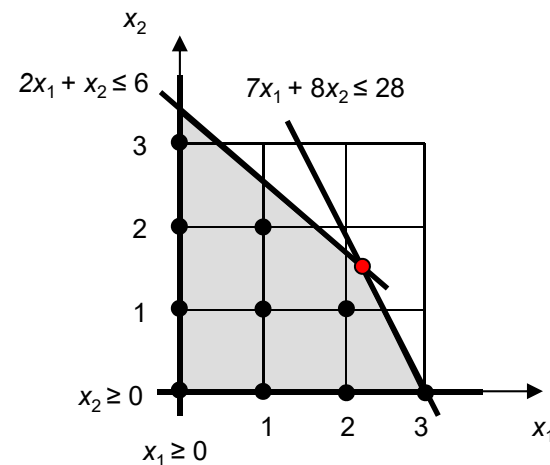
1.1 El problema relajado, es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } z &= 120x_1 + 80x_2 \\ \text{sujeto a } 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 7x_1 + 8x_2 + x_4 &= 28 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución: $z = 391.11$ para el punto $(x_1=5, x_2=4.5)$

$$\bar{b} = x_B = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{9} \\ \frac{14}{9} \end{pmatrix}$$

1.2c Se continua con el paso siguiente.



Solución: Algoritmo de los cortes de Gomory (continuación 1)

Paso 2: Control de optimalidad

2.2 Como la solución obtenida no cumple las condiciones de integralidad, se continua con el paso siguiente.

Paso 3: Generación de un corte

3.1 Si se emplea la variable x_2 para generar un corte de Gomory, se obtiene:

$$U = B^{-1}N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_{B_i} + \sum_j u_{ij} x_{N_j} = \bar{b}_i \quad x_2 - \frac{7}{9}x_3 + \frac{2}{9}x_4 = \frac{14}{9}$$

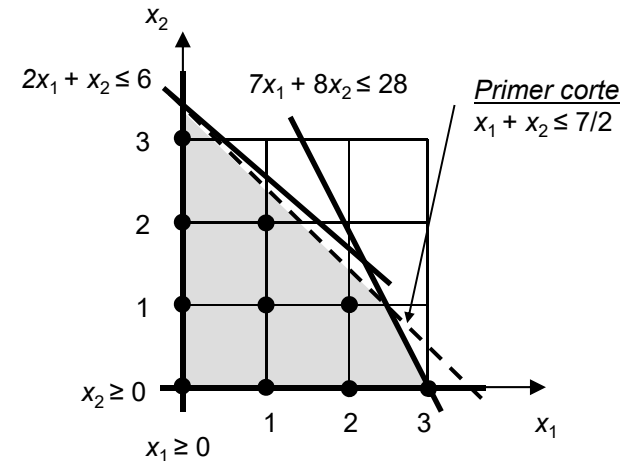
Por tanto, se obtiene:

$$u_{21} = e_{21} + f_{21} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{7}{9} = -1 + \frac{2}{9} \quad \Rightarrow \quad f_{21} = \frac{2}{9}$$

$$u_{22} = e_{22} + f_{22} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{9} = 0 + \frac{2}{9} \quad \Rightarrow \quad f_{22} = \frac{2}{9}$$

$$\bar{b}_2 = \bar{e}_2 + \bar{f}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{14}{9} = 1 + \frac{5}{9} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}_2 = \frac{5}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{Y el corte resulta ser: } \bar{f}_i - \sum_j f_{ij} x_{N_j} &\leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{9} - \left(\frac{2}{9} \quad \frac{2}{9} \right) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \leq 0 \\ &\Rightarrow \quad x_3 + x_4 \geq \frac{5}{2} \end{aligned}$$



Nótese que este corte puede expresarse en función de las variables originales x_1 y x_2 , de la forma siguiente. Empleando las restricciones de igualdad del problema relajado en forma estándar, x_3 y x_4 pueden expresarse en función de x_1 y x_2 :

$$x_3 = 6 - 2x_1 - x_2$$

$$x_4 = 28 - 7x_1 - 8x_2$$

Así, el corte en función de las variables x_1 y x_2 resulta ser $x_1 + x_2 \leq \frac{7}{2}$, que como puede verse en la figura da lugar a una reducción efectiva de la región factible y, sin embargo, no se excluye ninguna solución entera.

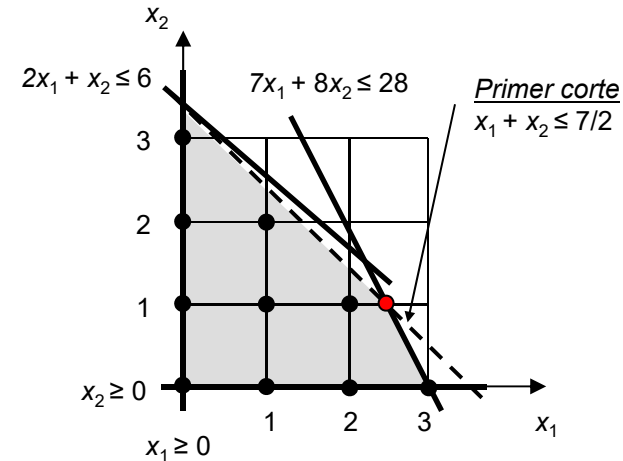
Solución: Algoritmo de los cortes de Gomory (continuación 2)

Paso 4: Resolución

- 4.1 Se resuelve el nuevo problema con el primer corte añadido como restricción adicional. Obsérvese que el corte de Gomory se escribe incluyendo una variable artificial x_5 :

$$\begin{array}{llll} \text{Maximizar} & z = & 120x_1 + 80x_2 & \\ \text{sujeto a} & 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \\ & 7x_1 + 8x_2 + x_4 & = & 28 \\ & x_3 + x_4 - x_5 & = & \frac{5}{2} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Solución: $z = 380$ para el punto $(x_1=5/2, x_2=1)$ $\bar{b} = x_B = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_4^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$



Paso 3: Generación de un corte

- 3.1 Si se emplea la variable x_1 para generar un corte de Gomory, se obtiene:

$$U = B^{-1}N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{9} \\ -1 & \frac{2}{9} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_{B_i} + \sum_j u_{ij} x_{N_j} = \bar{b}_i \quad x_1 + x_3 - \frac{1}{9}x_5 = \frac{5}{2}$$

Por tanto, se obtiene:

$$\begin{array}{llll} u_{11} = e_{11} + f_{11} & \Leftrightarrow & 1 = 1 + 0 & \Rightarrow & f_{11} = 0 \\ u_{12} = e_{12} + f_{12} & \Leftrightarrow & -\frac{1}{9} = -1 + \frac{8}{9} & \Rightarrow & f_{12} = \frac{8}{9} \\ \bar{b}_1 = \bar{e}_1 + \bar{f}_1 & \Leftrightarrow & \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} & \Rightarrow & \bar{f}_1 = \frac{1}{2} \end{array}$$

Y el corte resulta ser:

$$\begin{aligned} \bar{f}_i - \sum_j f_{ij} x_{N_j} &\leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} - \left(0 \quad \frac{8}{9}\right) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} \leq 0 \\ \Rightarrow x_5 &\geq \frac{9}{16} \quad \text{ó} \quad x_1 + x_2 \leq \frac{55}{16} \end{aligned}$$

Solución: Algoritmo de los cortes de Gomory (continuación 3)

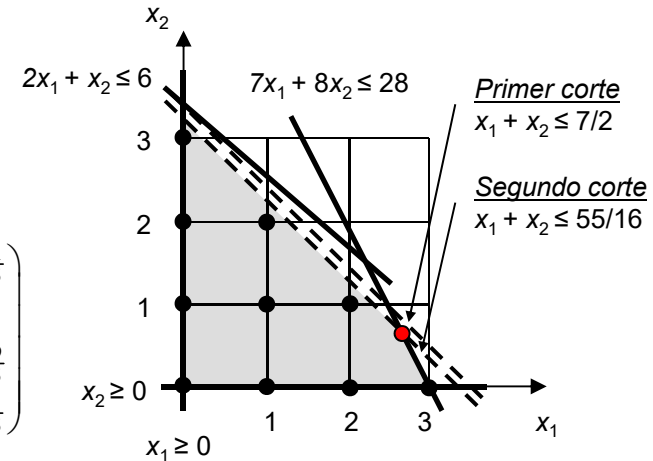
Paso 4: Resolución

4.1 Se resuelve el nuevo problema con el primer corte añadido como restricción adicional. Obsérvese que el corte de Gomory se escribe incluyendo una variable artificial x_6 :

$$\begin{array}{llll} \text{Maximizar} & z = & 120x_1 + 80x_2 & \\ \text{sujeto a} & 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \\ & 7x_1 + 8x_2 + x_4 & = & 28 \\ & x_3 + x_4 - x_5 & = & \frac{5}{2} \\ & x_5 - x_6 & = & \frac{9}{16} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0 \end{array}$$

Solución: $z = 377.5$ para el punto $(x_1=41/16, x_2=7/8)$

$$\bar{b} = x_B = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_4^* \\ x_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{41}{16} \\ \frac{7}{8} \\ \frac{49}{16} \\ \frac{9}{16} \end{pmatrix}$$



Paso 3: Generación de un corte

3.1 Si se emplea la variable x_2 para generar un corte de Gomory, se obtiene:

$$U = B^{-1}N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{9} \\ -1 & \frac{2}{9} \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_{B_i} + \sum_j u_{ij} x_{N_j} = \bar{b}_i \quad x_2 - x_3 + \frac{2}{9} x_6 = \frac{7}{8}$$

Por tanto, se obtiene:

$$\begin{array}{llll} u_{21} = e_{21} + f_{21} & \Leftrightarrow & -1 = -1 + 0 & \Rightarrow & f_{21} = 0 \\ u_{22} = e_{22} + f_{22} & \Leftrightarrow & \frac{2}{9} = 0 + \frac{2}{9} & \Rightarrow & f_{22} = \frac{2}{9} \\ \bar{b}_2 = \bar{e}_2 + \bar{f}_2 & \Leftrightarrow & \frac{7}{8} = 0 + \frac{5}{8} & \Rightarrow & \bar{f}_2 = \frac{7}{8} \end{array} \Rightarrow \bar{f}_i - \sum_j f_{ij} x_{N_j} \leq 0 \Rightarrow \frac{7}{8} - \left(0 \quad \frac{2}{9}\right) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} \leq 0$$

$$\Rightarrow x_6 \geq \frac{63}{16} \quad \text{ó} \quad x_1 + x_2 \leq 3$$

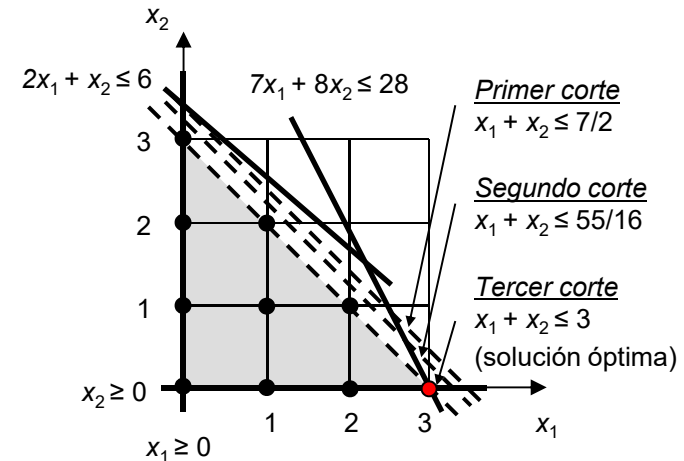
Solución: Algoritmo de los cortes de Gomory (continuación 4)

Paso 4: Resolución

- 4.1 Se resuelve el nuevo problema con el primer corte añadido como restricción adicional. Obsérvese que el corte de Gomory se escribe incluyendo una variable artificial x_7 :

$$\begin{array}{llll} \text{Maximizar} & z = & 120x_1 + 80x_2 & \\ \text{sujeto a} & 2x_1 + x_2 + x_3 & -x_7 = & 6 \\ & 7x_1 + 8x_2 + x_4 & -x_7 = & 28 \\ & x_3 + x_4 - x_5 & -x_7 = & \frac{5}{2} \\ & x_5 - x_6 - x_7 & = & \frac{9}{16} \\ & x_6 - x_7 & = & \frac{63}{16} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0 \end{array}$$

Solución: $z = 360$ para el punto $(x_1=3, x_2=0)$



Paso 2: Control de optimalidad

- 2.1 Como la solución obtenida cumple las condiciones de integralidad, se para dado que esta solución es óptima.



Solución: $z = 360$ para el punto $(x_1=3, x_2=0)$

solution (optimal) with objective 360:
 $x_1 = 3;$
 $x_2 = 0;$



```
//Variables de decisión
dvar int+ x1;
dvar int+ x2;

//Función objetivo
maximize 120*x1 + 80*x2;

//Restricciones
subject to {
    2*x1 + x2 <= 6;
    7*x1 + 8*x2 <= 28;
}
```

Ejercicio 1:

Una empresa manufacturera transforma materia prima en dos productos distintos. Esta empresa dispone de 6 unidades de materia prima y 28 horas de tiempo productivo. La manufactura de una unidad del producto I requiere 2 unidades de material y 7 horas de tiempo, mientras que la producción del producto II requiere 1 unidad de material y 8 horas de tiempo. Los precios de venta de los productos I y II son 120 y 80 euros respectivamente. Determinése el número de productos de cada tipo que ha de producir la empresa para maximizar su beneficio.

Resuélvase el problema empleando el algoritmo de B&B.

Ejercicio 2:

Un operario especializado ha de reparar una instalación de alta montaña. Es conveniente que lleve consigo 5 equipos diferentes de reparación. Sin embargo, el peso máximo a transportar está limitado a 60 unidades. El peso de cada equipo y un parámetro que cuantifica su utilidad esperada aparecen en la siguiente tabla.

Equipo	1	2	3	4	5
Peso (unidades)	52	23	35	15	7
Utilidad (%)	100	60	70	15	15

¿Qué equipos ha de llevarse consigo el operario? . Para responder a dicha pregunta:

- Resuélvase el problema empleando el algoritmo de B&B.
- Comprobar si puede utilizarse alguna de las técnicas de preprocesamiento para PPLE Binarios estudiados.
 - Incluir todos los posibles planos de corte para PPLE Binarios.
 - Resuélvase el nuevo mediante B&B el problema obtenido tras dicho preprocesamiento e introducción de los planos de corte.



UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Rafael del Vado Vírseda
rdelvado@sip.ucm.es

APÉNDICE DEL TEMA 6

EJEMPLOS

- 1. ALGORITMO DE RAMIFICACIÓN Y ACOTACIÓN**
- 2. ALGORITMO DE CORTE: PROGRAMACIÓN TOTALMENTE ENTERA**
- 3. ALGORITMO DE CORTE: PROGRAMACIÓN ENTERA MIXTA**
- 4. ALGORITMO DE BALAS: PROGRAMACIÓN 0-1**

1. ALGORITMO DE RAMIFICACIÓN Y ACOTACIÓN

Consideramos el problema de programación entera:

$$\text{IP: } \begin{cases} \min c^T x \\ x \in S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\} \\ x_j \text{ ENTERA}, \forall j \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

1) INICIALIZACION:

Se resuelve la relajación continua CP y se llega al óptimo continuo: x^*

Si x^* es entero $\Rightarrow x^*$ es solución óptima de IP y hemos terminado //

ó

Caso contrario: Sea z_0 COTA SUPERIOR DE FUNCIÓN OBJETIVO (Si no la conocemos, tomamos $z_0 = \infty$)

Ir a 2)

2) RAMIFICACION:

Sea x_i^* NO ENTERO (no se especifica cual). Se crean 2 subproblemas añadiendo las restricciones: $x_i \leq \text{parteEntera}(x_i^*)$ y $x_i \geq \text{parteEntera}(x_i^*) + 1$ respectivamente

1. ALGORITMO DE RAMIFICACIÓN Y ACOTACIÓN

3) ACOTACION:

Determinar el óptimo de los dos subproblemas $\Rightarrow$ Vale una cota inferior (Z_L)

4) SONDEO: (TACHAR VÉRTICES)

Excluir de proceso de ramificación aquellos nodos que verifiquen alguna de las siguientes 3 condiciones:

a) $Z_L \geq Z_u$

b) $\nexists$ solución factible (en el nodo que estamos sondeando)

c) Si Z_L se alcanza en entero y $Z_L < Z_u \Rightarrow Z_u = Z_L$ y almacenar como mejor solución entera obtenida.

Repetir 4) hasta que NO haya vértices por sondear.

5) COMPROBACION:

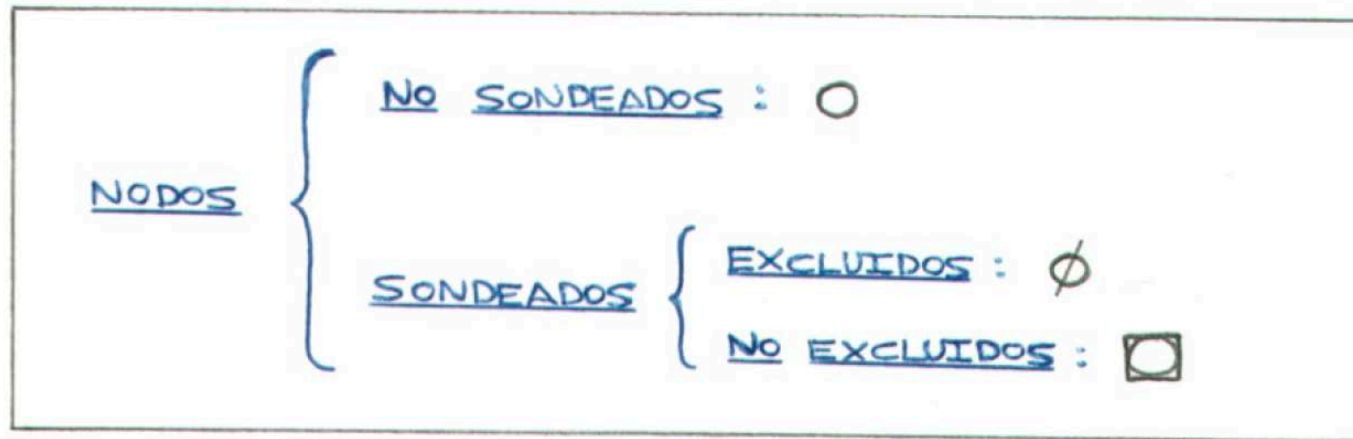
Hay dos opciones:

$\exists$ vértice NO excluido $\Rightarrow$ Ir a 2) y ramificar

ó
Todos los vértices están excluidos $\Rightarrow$ La solución óptima es la actual //

1. ALGORITMO DE RAMIFICACIÓN Y ACOTACIÓN

Los NODOS del grafo pueden ser:





EJEMPLO 1

$$\text{IP: } \begin{cases} \text{Mín } \{4x_1 - 6x_2\} \text{ sujeto a:} \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ (ENTERAS)} \end{cases} \longrightarrow \text{CP: } \begin{cases} \text{Mín } \{4x_1 - 6x_2\} \text{ sujeto a:} \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1) INITIALIZACION:

Resolviendo la relajación continua tenemos el óptimo continuo: $x^* = (3/2, 5/2)$ (NO ENTERA)

con $z_{cp}^* = -9$. Gráficamente:

$$\textcircled{-9} \quad x^* = (3/2, 5/2)$$

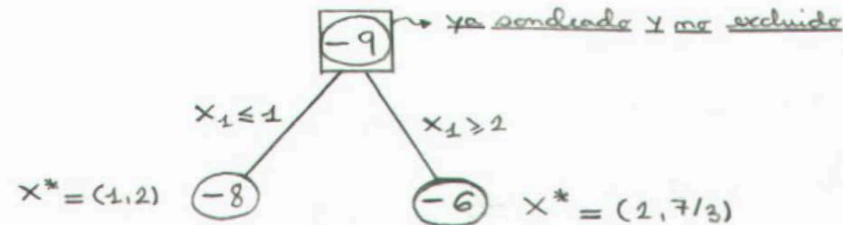
Como x^* no es entera y no conocemos una cota superior de la función objetivo, tomamos: $z_0 = \infty$

2) RAMIFICACION:

Tomamos $x_1^* = 3/2 = 1.5$ y las restricciones: $x_1 \leq 1$ y $x_1 \geq 2$ para los nuevos dos subproblemas.

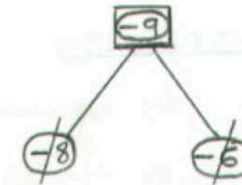
3) ACOTACION:

Graficamente: el óptimo de los dos subproblemas viene dado por el siguiente grafo:



4) SONDEO:

- Sondeo nodo -8: $z_L = -8$ se almacena en el entero $x^* = (1, 2)$ ya
 $z_L = -8 < z_u \equiv z_o = \infty$. Por C): $z_u = -8$ ya x^* se
almacena como mejor solución obtenida (Se excluye el
nodo)
- Sondeo nodo -6: $z_L = -6 \geq z_u = -8$. Por a): excluimos el nodo



5) COMPROBACION: Todos los vértices o nodos están excluidos, luego la solución óptima es la actual: $x^* = (1, 2)$ //

Resolver el siguiente problema de programación entera:

$$\text{IP: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Mín } \{-4x_1 - 11x_2\} \\ 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 16 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_i \geq 0 \text{ (ENTERAS)} \end{array} \right.$$

aplicando el ALGORITMO DE RAMIFICACION Y ACOTACION

EJEMPLO 2

1) INICIALIZACION:

Resolvemos la relajación continua:

$$\text{CP: } \begin{cases} \text{Mín} \{ -4x_1 - 11x_2 + 0 \cdot x_{s1} + 0 \cdot x_{s2} + 0 \cdot x_{s3} \} \\ 2x_1 - x_2 + x_{s1} = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_{s2} = 16 \\ -x_1 + 2x_2 + x_{s3} = 4 \\ x_1, x_{s1}, x_{s2}, x_{s3} \geq 0 \end{cases}$$

Aplicando el ALGORITMO DEL SIMPLEX:

	-4	-11	0	0	0	
	x_1	x_2	x_{s1}	x_{s2}	x_{s3}	
0 x_{s1}	2	-1	1	0	0	4
0 x_{s2}	2	5	0	1	0	16
0 x_{s3}	-1	②	0	0	1	4
	-4	-11	0	0	0	0

	-4	-11	0	0	0	
	x_1	x_2	x_{s1}	x_{s2}	x_{s3}	
0 x_{s1}	3/2	0	1	0	1/2	6
0 x_{s2}	9/2	0	0	1	-5/2	6
-11 x_2	-1/2	1	0	0	1/2	2
	-19/2	0	0	0	11/2	-22

EJEMPLO 2

	-4	-11	0	0	0	
	x_1	x_2	x_{s1}	x_{s2}	x_{s3}	
0 x_{s1}	0	0	1	$-1/3$	$4/3$	4
-4 x_1	1	0	0	$2/9$	$-5/9$	$4/3$
-11 x_2	0	1	0	$1/9$	$2/9$	$8/3$
	0	0	0	$19/9$	$2/9$	$-\frac{104}{3}$

$$\leadsto \begin{aligned} X^* &= (4/3, 8/3) \\ z_{CP}^* &= -104/3 \end{aligned}$$

Como X^* no es entera y no conocemos una cota superior de la función objetivo, tomamos: $z_0 = \infty$

EJEMPLO 2

2) RAMIFICACIÓN:

Tomamos $x_1^* = \frac{4}{3} = 1.\bar{3}$ no entera y las restricciones: $x_1 \leq 1$ y $x_1 \geq 2$. Resolvemos los subproblemas asociados a estas nuevas restricciones:

$x_1 \leq 1$

	x_1	x_2	x_{s1}	x_{s2}	x_{s3}	x_{s4}	
$0 \ x_{s1}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	4
$-4 \ x_1$	1	0	0	$\frac{2}{9}$	$-\frac{5}{9}$	0	$\frac{4}{3}$
$-11 \ x_2$	0	1	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{8}{3}$
$0 \ x_{s4}$	0	0	0	$-\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	1	$-\frac{1}{3}$
	0	0	0	$\frac{19}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$-\frac{104}{3}$

ALG. DUAL

	x_1	x_2	x_{s1}	x_{s2}	x_{s3}	x_{s4}	
$0 \ x_{s1}$	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$
$-4 \ x_1$	1	0	0	0	0	1	1
$-11 \ x_2$	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
$0 \ x_{s2}$	0	0	0	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$\frac{3}{2}$
	0	0	0	0	$\frac{11}{2}$	$\frac{19}{2}$	$-\frac{63}{2}$

$x_1 \geq 2$

	x_1	x_2	x_{s1}	x_{s2}	x_{s3}	x_{s4}	
$0 \ x_{s1}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	4
$-4 \ x_1$	1	0	0	$\frac{2}{9}$	$-\frac{5}{9}$	0	$\frac{4}{3}$
$-11 \ x_2$	0	1	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{8}{3}$
$0 \ x_{s4}$	0	0	0	$\frac{2}{9}$	$-\frac{5}{9}$	1	$-\frac{2}{3}$
	0	0	0	$\frac{19}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$-\frac{104}{3}$

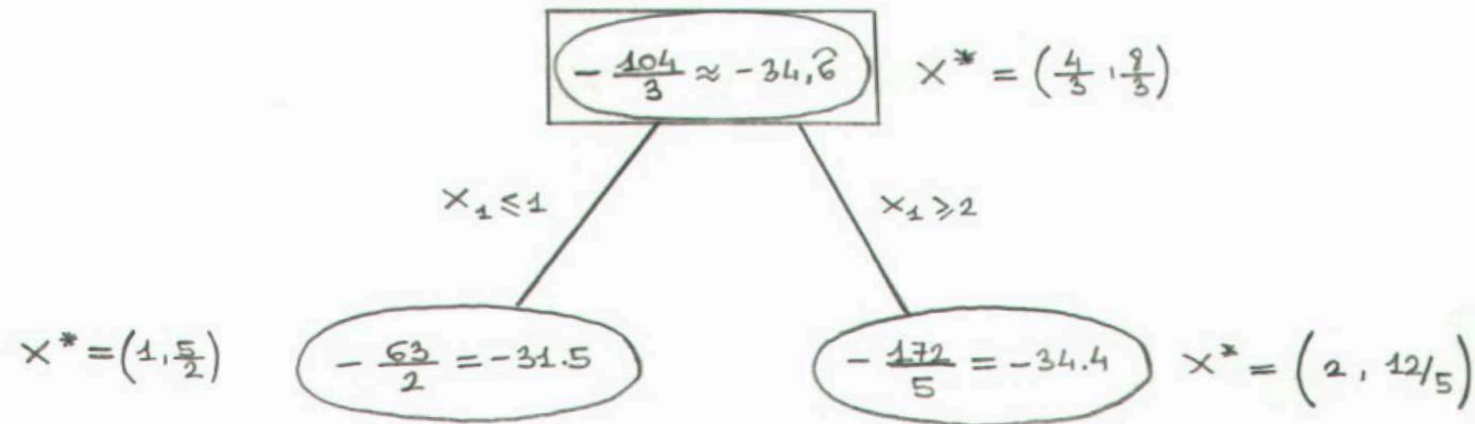
ALG. DUAL

	x_1	x_2	x_{s1}	x_{s2}	x_{s3}	x_{s4}	
$0 \ x_{s1}$	0	0	1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{12}{5}$	$\frac{12}{5}$
$-4 \ x_1$	1	0	0	0	0	-1	2
$-11 \ x_2$	0	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{5}$
$0 \ x_{s3}$	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	1	$-\frac{9}{5}$	$\frac{6}{5}$
	0	0	0	$\frac{11}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{172}{5}$

EJEMPLO 2

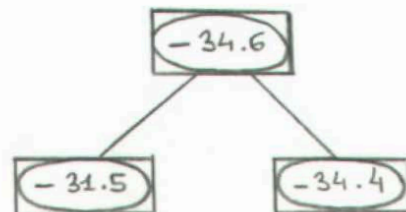
3) ACOTACION:

Graficamente, el óptimo de los dos subproblemas viene dado por el siguiente grafo:



4) SONDEO:

- Sondeo nodo -31.5 : $z_L = -31.5 < z_u \equiv z_o = \infty$ pero z_L no se alcanza en entero $\rightarrow$ No se excluye
- Sondeo nodo -34.4 : $z_L = -34.4 < z_u \equiv z_o = \infty$ pero z_L no se alcanza en entero $\rightarrow$ No se excluye

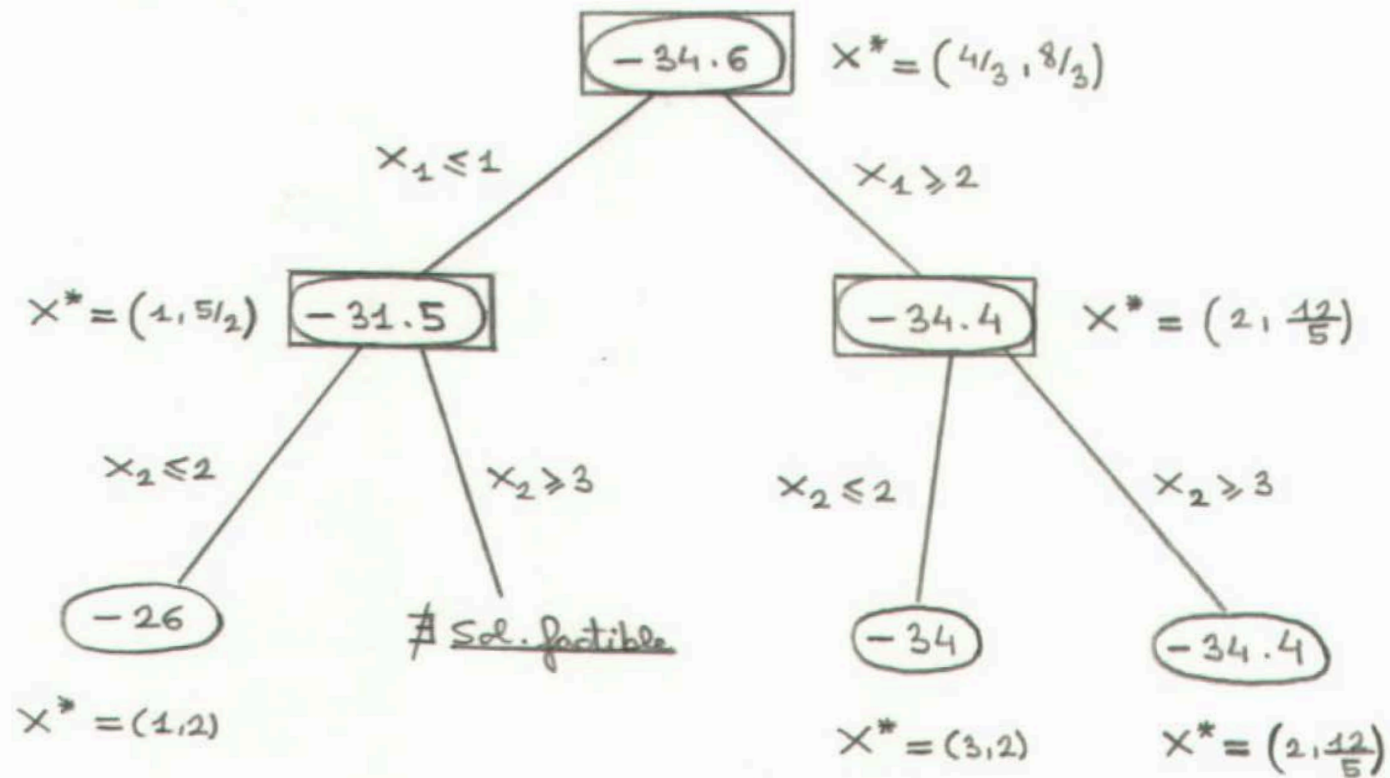




EJEMPLO 2

2) RAMIFICACIÓN / 3) ACOTACIÓN :

Ramificando como antes para cada nodo se llega al grafo siguiente :



EJEMPLO 2

4) SONDEO:

- Sondeo nodo -26: $z_L = -26 < z_u \equiv z_0 = \infty$ y z_L se alcanza en entero $\Rightarrow$ Por c): $z_u = -26$ y $x^* = (1, 2)$
mejor solución hasta ahora obtenida $\rightarrow$ Se excluye
- Sondeo nodo "# Sol. factible": Se excluye por b)
- Sondeo nodo -34: $z_L = -34 < z_u = -26$ y z_L se alcanza en entero $\Rightarrow$ Por c): $z_u = -34$ y $x^* = (3, 2)$
mejor solución hasta ahora obtenida $\rightarrow$ Se excluye
- Sondeo nodo -34.4: $z_L = -34.4 < z_u = -34$. No nos valen a), b) y c), sin embargo, si seguimos ramificando el árbol, seguimos invariantemente obteniendo lo mismo: una solución no entera: $x^* = (2, \frac{12}{5})$ y una solución entera: $x^* = (3, 2)$ que ya hemos analizado en el nodo anterior. Por tanto, podemos excluir este nodo.

5) COMPROBACION:

Todos los vértices están excluidos $\Rightarrow$ La SOLUCIÓN ÓPTIMA de IP es: $x_{IP}^* = (3, 2)$, $z_{IP}^* = -34 //$

2. ALGORITMO DE CORTE: PROGRAMACIÓN TOTALMENTE ENTERA

Consideramos el siguiente problema de programación entera:

$$\text{IP: } \begin{cases} \text{Mín} \{-4x_1 - 11x_2\} \\ 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 16 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_i \geq 0, \text{ ENTERAS} \end{cases}$$

Comenzamos resolviendo la relajación continua CP asociada: (Damos ya la tabla del Simplex óptima, siendo x_3, x_4, x_5 las variables de holgura)

	-4	-11	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0 x_3	0	0	1	-1/3	4/3	4
-4 x_1	1	0	0	2/9	-5/9	4/3
-11 x_2	0	1	0	1/9	2/9	8/3
	0	0	0	19/9	2/9	$-\frac{104}{3}$

} no es entera

2. ALGORITMO DE CORTE: PROGRAMACIÓN TOTALMENTE ENTERA

Seleccionamos x_1 no entera y deducimos cual sería el corte:

$$\sum_{j \in J} f_j \cdot x_j - y_1 = f_0 \leadsto \frac{2}{9}x_4 + \frac{4}{9}x_5 - y_1 = \frac{1}{3} \quad \left(-\frac{5}{9} = \left[-\frac{5}{9} \right] + f_j = -1 + \frac{4}{9} \right)$$



introducimos el corte en la tabla del Simplex:

		-4	-11	0	0	0	0
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1
0	x_3	0	0	1	$-1/3$	$4/3$	4
-4	x_1	1	0	0	$2/9$	$-5/9$	$4/3$
-11	x_2	0	1	0	$1/9$	$2/9$	$8/3$
0	y_1	0	0	0	$-2/9$	$-4/9$	$1/3$
		0	0	0	$19/9$	$2/9$	$-\frac{104}{3}$

NO. BVAL

		-4	-11	0	0	0	0
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1
0	x_3	0	0	1	-1	0	3
-4	x_1	1	0	0	$1/2$	0	$7/4$
-11	x_2	0	1	0	0	0	$15/6$
0	x_5	0	0	0	$1/2$	1	$3/4$
		0	0	0	2	0	$-\frac{69}{2}$

no es
entera

2. ALGORITMO DE CORTE: PROGRAMACIÓN TOTALMENTE ENTERA

Seleccionamos ahora x_5 no entera y hallamos el corte:

$$\sum_{j \in J} f_j \cdot x_j - Y_1 = f_0 \leadsto \frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{4}Y_1 - Y_5 = \frac{3}{4} \quad \left(-\frac{9}{4} = \left[-\frac{9}{4}\right] + f_j = -3 + \frac{3}{4}\right)$$

introducimos este nuevo corte en la tabla del Simplex:

	-4	-11	0	0	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_5	
0 x_3	0	0	1	-1	0	3	0	3
-4 x_1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{7}{4}$
-11 x_2	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{15}{6}$
0 x_5	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{9}{4}$	0	$\frac{3}{4}$
0 y_5	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\left(-\frac{3}{4}\right)$	1	$-\frac{3}{4}$
	0	0	0	2	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{69}{2}$

ALG. DUAL $\rightarrow$

	-4	-11	0	0	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_5	
0 x_3	0	0	1	-3	0	0	4	0
-4 x_1	1	0	0	$\frac{4}{3}$	0	0	$-\frac{5}{3}$	3
-11 x_2	0	1	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{2}{3}$	2
0 x_5	0	0	0	2	1	0	-3	3
0 y_1	0	0	0	$\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{4}{3}$	1
	0	0	0	$\frac{97}{12}$	0	0	$\frac{2}{3}$	-34

De esta forma obtenemos ya la solución entera óptima del problema IP: $x^* = (3, 2)$ y $z = -34$

3. ALGORITMO DE CORTE: PROGRAMACIÓN ENTERA MIXTA

Consideramos el siguiente problema de programación entera mixta:

$$\text{MIP : } \begin{cases} \text{Mín} \{-6x_1 - x_2 - 2x_3\} \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \leq 20 \\ 12x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 60 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ ENTERAS} \end{cases} \quad (x_3, x_{s1}, x_{s2}, x_{s3} \geq 0 \text{ REALES})$$

Comenzamos resolviendo la relajación continua CP asociada: (Para ya la Tabla del Simplex óptimo)

	-6	-1	-2	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_{s1}	x_{s2}	x_{s3}	
-2 x_3	7	0	1	1/2	1/2	0	15
-1 x_2	19/3	1	0	1/6	1/2	0	25/3
0 x_{s3}	-34/3	0	0	-2/3	-1	1	110/3
	43/3	0	0	7/6	3/2	0	-115/3

← NO ES ENTERA → necesitamos introducir un corte

necesitamos introducir un corte: $J = \{1, s_1, s_2\}$, $i = 2$, con lo cual, el corte será:

$$-d_1 x_1 - d_{s_1} x_{s_1} - d_{s_2} x_{s_2} + u_2 = -f_2 \quad , \text{ siendo:}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{25}{3} = 8 + \frac{1}{3} \leadsto [\bar{x}_2] = 8 \text{ y } f_2 = \frac{1}{3}$$

$$y_{2s_1} = \frac{1}{6} > 0 \text{ y } x_{s_1} \text{ es real} \Rightarrow d_{s_1} = \frac{1}{6}$$

$$y_{2s_2} = \frac{1}{2} > 0 \text{ y } x_{s_2} \text{ es real} \Rightarrow d_{s_2} = \frac{1}{2}$$

$$y_{21} = \frac{19}{3} = 6 + \frac{1}{3} \leadsto [y_{21}] = 6 \text{ y } g_{21} = \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3} = f_2 \text{ y } x_1 \text{ es entera} \Rightarrow d_1 = \frac{1}{3}$$

luego, el corte es:

$$-\frac{1}{3} x_1 - \frac{1}{6} x_{s_1} - \frac{1}{2} x_{s_2} + u_2 = -\frac{1}{3}$$

lo introducimos en la Tabla del Simplex:

3. ALGORITMO DE CORTE: PROGRAMACIÓN ENTERA MIXTA

	x_1	x_2	x_3	x_{s1}	x_{s2}	x_{s3}	u_2	
$-2 x_3$	7	0	1	$1/2$	$1/2$	0	0	15
$-1 x_2$	$19/3$	1	0	$1/6$	$1/2$	0	0	$25/3$
$0 x_{s3}$	$-34/3$	0	0	$-2/3$	-1	1	0	$110/3$
$0 u_2$	$-1/2$	0	0	$-1/6$	$-1/2$	0	1	$-1/3$
	$43/3$	0	0	$7/6$	$3/2$	0	0	$-\frac{115}{3}$

ALG. DUAL →

	x_1	x_2	x_3	x_{s1}	x_{s2}	x_{s3}	u_2	
$-2 x_3$	$20/3$	0	1	$1/3$	0	0	1	$44/3$
$-1 x_2$	6	1	0	0	0	0	1	8
$0 x_{s3}$	$-32/3$	0	0	$-1/3$	0	1	-2	$112/3$
$0 x_{s2}$	$2/3$	0	0	$1/3$	1	0	-2	$2/3$
	$40/3$	0	0	$2/3$	0	0	3	$-\frac{112}{3}$

De esta forma obtenemos ya la solución óptima: $x^* = (0, 8, 44/3)$ y $z = -\frac{112}{3} //$

4. ALGORITMO DE BALAS: PROGRAMACIÓN 0 - 1

1) INICIALIZACION:

$$F = \emptyset ; L = \{1, \dots, m\}$$

$f_L \equiv$ Cota inferior del óptimo de la función objetivo (valor de solución factible conocida, si no se conoce ninguna, $f_L = -\infty$)

2) A partir de una solución parcial no excluida (inicialmente, la de $F = \emptyset$), sea $K \in L$, entonces: Crear dos nodos con $x_K = 1$ y $x_K = 0$ y hacer: $F = F \cup \{K\}$ y $L = L \setminus \{K\}$

3) COTA SUPERIOR:

Para cada subproblema asociado a un nodo, determinar:

$$f_u = \sum_{j \in F} c_j \bar{x}_j + \sum_{j \in L} c_j \quad (\text{estamos usando el que } c_j \geq 0)$$

4. ALGORITMO DE BALAS: PROGRAMACIÓN 0 - 1

4) EXCLUSION:

Excluimos soluciones parciales de ramificaciones posteriores cuando se da una de las circunstancias siguientes:

- a) $f_u < f_L$
 - b) No hay complementos factibles: $\exists i \in \{1, \dots, m\}$ tal que: $\sum_{j \in L} \min\{a_{ij}, 0\} > b_i - \sum_{j \in F} a_{ij} \cdot \bar{x}_j$
 - c) Si la solución parcial ha sido completada ($L = \emptyset$) y $f_u > f_L$, entonces: actuali-
zamos la mejor solución y hacemos que: $f_L = f_u$
- Repetir 4) para todas las soluciones parciales.

5) Hay dos opciones:

- Todas las soluciones parciales han sido excluidas $\Rightarrow$ La solución óptima es la actual //
- Caso contrario: Hay una solución parcial no excluida $\Rightarrow$ Ir al paso 2)

Aplicamos el ALGORITMO DE BALAS al siguiente problema de programación 0-1:

$$(0-1)P: \begin{cases} \text{Max} \{ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \} \\ -x_1 + x_2 + x_3 \leq 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_i \in \{0,1\} \end{cases}$$

1) INICIALIZACION:

$$F = \emptyset ; L = \{1,2,3\}$$

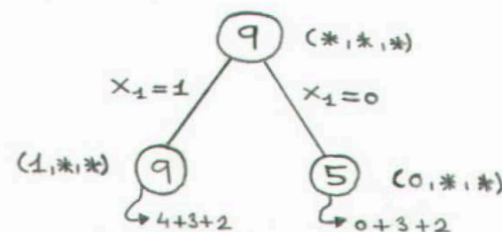
$$f_L = -\infty$$

→ el valor máximo de la función objetivo para $(*,*,*)$ sería $4+3+2=9$

9 $(*,*,*)$

2) Tomamos de $(*,*,*)$, $K=1 \in L$ y para: $F=\{1\}$, $L=\{2,3\}$, creamos dos nodos con $x_1=1$ y $x_1=0$

3) COTA SUPERIOR:

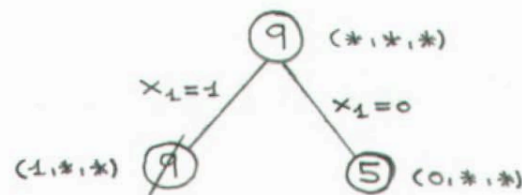


4) EXCLUSION :

Analizamos las soluciones parciales: $\sum_{j \in L} \min\{a_{ij}, 0\} > b_i - \sum_{j \in F} a_{ij} \bar{x}_j$

- $(1, *, *) \leadsto \min\{1, 0\} + \min\{-1, 0\} = 0 - 1 = -1 > -2 = 1 - 3 \cdot 1 \Rightarrow (1, *, *)$ es incompatible con la 2ª restricción, no tiene complementos factibles y se rechaza.
- $(0, *, *) \leadsto$ Sí tiene, por lo menos, un complemento factible, $f_u = 5 \neq -\infty = f_L$ de la solución parcial no ha sido completada, luego no excluimos $(0, *, *)$

5) La solución parcial $(0, *, *)$ no ha sido excluida:



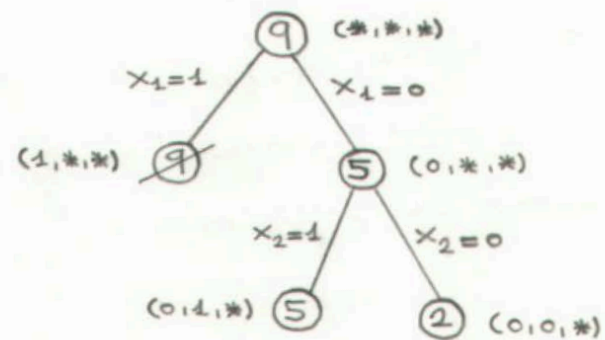
Vamos al paso 2):



EJEMPLO

2) Tomamos de $(0, *, *)$, $K=2 \in L$ y para $F=\{1,2\}$, $L=\{3\}$, creamos dos nuevos nodos con $X_2=1$ y $X_2=0$

3) COTA SUPERIOR:



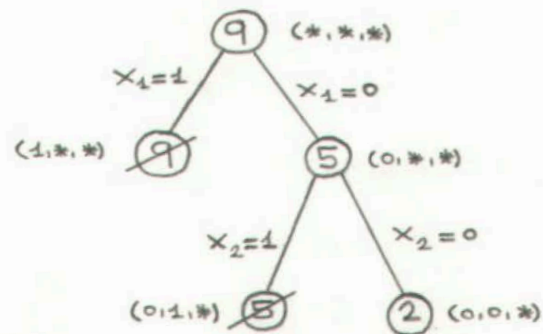


4) EXCLUSION:

Analizamos las nuevas soluciones parciales: $\sum_{j \in L} \min\{a_{ij}, 0\} > b_i - \sum_{j \in F} a_{ij} \cdot \bar{x}_j$

- $(0, 1, *) \leadsto \min\{1, 0\} = 0 > 0 - (-1) \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \Rightarrow (0, 1, *)$ es incompatible con la 1ª restricción, no tiene complementos factibles y se rechaza.
- $(0, 0, *) \leadsto$ Tiene complementos factibles, $f_u = 2 \neq -\infty = f_L$ y la solución parcial no ha sido completada, luego no excluimos $(0, 0, *)$

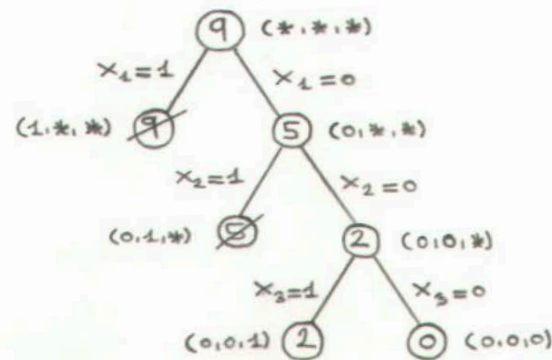
5) La solución parcial $(0, 0, *)$ no ha sido excluida:



Vamos al paso 2):

2) Tomamos de $(0,0,*)$, $K=3 \in L$ y para: $F=\{1,2,3\}$, $L=\emptyset$, creamos dos nuevos nodos con
 $x_3=1$ y $x_3=0$

3) COTA SUPERIOR:



4) EXCLUSION:

Analizamos las nuevas soluciones parciales:

- $(0,0,1) \leadsto$ no verifica la 1ª restricción: $-x_1 + x_2 + x_3 \leq 0$, luego se excluye por no ser solución factible.
- $(0,0,0) \leadsto$ Es solución parcial completada y $f_u = 0 > -\infty = f_L$, luego: $(0,0,0)$ es la actual mejor solución factible y hacemos: $f_L = f_u = 0$. Por lo que, excluimos esta solución del proceso de ramificación.

5) Todas las soluciones parciales han sido excluidas^(*) $\Rightarrow$ la solución óptima es la actual,
es decir: (0,0,0) , con valor 0 en la función objetivo //

- Si hubiésemos hecho un cambio de variables (Ver ejemplo pág. 70) para que todos los C_j fueran mayores o iguales que 0, tendríamos que dejar ahora ese cambio:

$$(0,0,0) \xrightarrow{x_2 = 1 - x'_2} (0,1,0)$$

el valor en la función objetivo: $4x_1 + 3x'_2 + 2x_3 - 3$ sería: -3

