DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA APLICADAS A LA INGENIERÍA CIVIL

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE LAS MEDIDAS EN LA LÓGICA BORROSA: CONDICIONALIDAD, ESPECIFICIDAD Y TRANSITIVIDAD.

LUIS GARMENDIA SALVADOR

Licenciado en Ciencias Matemáticas

DIRECTOR

ENRIC TRILLAS RUIZ

Doctor en Ciencias

2001

Resumen

Contribución al estudio de las medidas en la lógica borrosa: condicionalidad, especificidad y transitividad.

Esta memoria de doctorado pretende revisar el concepto de medida y de medida borrosa para estudiar y proponer unas nuevas medidas de incondicionalidad, de especificidad y de transitividad.

En el segundo capítulo se proponen dos métodos para medir la μ-T-incondicionalidad de relaciones borrosas como un valor que permita analizar si la inferencia borrosa generaliza el *modus ponens*. Se utiliza una distancia generalizada no simétrica $1\text{-}J^T$ para calcular dicho valor y se demuestra que con dicha distancia ambas formas de medir la μ-T-incondicionalidad resultan iguales para toda t-norma continua. Se ofrecen ejemplos para relaciones finitas y para los principales operadores de implicación residuales, S-implicaciones, QM-implicaciones y conjunciones.

En el tercer capítulo se proponen las $\prec$-medidas borrosas de especificidad definidas mediante t-normas, y se muestra bajo qué condiciones las $\prec$-medidas borrosas de especificidad son medidas de especificidad según Yager. Se analizan nuevas $\prec$-medidas borrosas de especificidad generadas por familias de t-normas. Se generaliza la definición de $\prec$-medidas de especificidad bajo universos infinitos, estudiando diferencias al utilizar la integral de Choquet o de Sugeno, y finalmente se estudian métodos nuevos de estudiar la especificidad de conjuntos borrosos cuando la información aumenta con una T-similaridad para cualquier t-norma.

En el cuarto capítulo se propone un nuevo algoritmo de T-transitivización de relaciones borrosas y nuevas medidas de T-transitividad de relaciones borrosas.

En el capítulo de apéndices, entre otros temas, se revisan diferentes conceptos de medidas, haciendo énfasis en las medidas no aditivas, medidas normales, medidas convergentes de Sugeno, medidas monótonas respecto de la inclusión y $\prec$-medidas monótonas respecto de un preorden, analizando sus diferencias y ofreciendo numerosos ejemplos.

Abstract

A contribution on measures in fuzzy logic: conditionality, specificity and transitivity.

This Doctoral Thesis works toward revisiting the concept of measure and fuzzy measure. Some measures are studied carefully, specially the μ-T-incondicitionality measures, fuzzy $\prec$-measures of specificity and T-transitivity measures.

The second chapter proposes two different ways to measure the μ-T-inconditionality of fuzzy relations towards measuring whether a fuzzy inference generalises the *modus ponens* property. A generalised $1\text{-}J^T$ non commutative distance is proposed and it is proved that using such distance both methods of measuring the μ-T-inconditionality become the same for all continuos t-norms. Some examples are given for finite relations and some residuals, S-implications, QM-implications and aggregation operators.

On the third chapter the fuzzy $\prec$-measures of specificity defined through t-norms are proposed. The known Yager's measures of specificity are shown to be fuzzy $\prec$-measures of specificity. It is studied on which cases fuzzy $\prec$-measures of specificity are Yager's measures of specificity. New fuzzy $\prec$-measures of specificity are defined through families of t-norms. The definition of fuzzy $\prec$-measures of specificity is generalised to infinite universes showing examples using the Choquet integral and the Sugeno integral. Finally there are proposed new solutions for measuring the specificity of a fuzzy set when the available information is increased though a T-similarity for any t-norm.

The fourth chapter proposes a new method to T-transitivizate fuzzy relations and new measures of T-transitivity of fuzzy relations are proposed.

The annexe also studies different definitions of measures, specially non aditive measures, normal measures, Sugeno measures, monotonous measures and preorder monotonous measures, analysing some differences and showing examples.

Agradecimientos

Quiero en primer lugar dejar constancia de mi agradecimiento y gratitud al profesor Enric Trillas, director de esta memoria, no sólo por haber trazado las líneas de investigación iniciales, sino también por la paciencia, el apoyo, los consejos, su asombroso olfato para intuir la dirección de los mejores resultados, y el interés constante que ha mostrado durante estos años, y sin los cuales este trabajo no habría podido realizarse.

Así mismo quiero agradecer a Pedro Burillo y a Adela Salvador por iniciarme en el mundo de la investigación en conjuntos borrosos y lógicas borrosas y contagiarme el entusiasmo en esta materia.

Mi agradecimiento también al profesor Ronald Yager por haber tenido la amabilidad de sugerirme ideas y comentarios que han ayudado a la realización de esta memoria.

Mi agradecimiento a mi profesor tutor Emilio de la Rosa por allanarme el camino para la consecución de este trabajo.

Quiero también agradecer a Susana Cubillo su cuidadosa lectura y sus valiosos comentarios que han ayudado a mejorar este trabajo.

Este trabajo se ha beneficiado asimismo de las discusiones mantenidas durante los seminarios organizados semanalmente por Enric Trillas en la Facultad de Informática de la Universidad Politécnica de Madrid. Estoy por este motivo en deuda, además de con los ya citados con Elena Castiñeira, Cristina del Campo, José Angel Olivas, Ana Pradera y Adolfo R. del Soto, asistentes habituales de estas reuniones.

"La incertidumbre, no obstante, formaba parte de la vida. Esperar hasta contar con una certeza absoluta equivalía a quedarse atascado hasta que fuera demasiado tarde."

"Sabía que nunca tendría información completa o totalmente precisa; pero aun así debía actuar, debía decidir, debía emplear los datos que tenía o creía tener, y dejar que me llevaran a donde fuese."

ISAAC ASIMOV

"Utopía"

ÍNDICE

CAPÍTULO 1:

PRESENTACIÓN Y ESTRUCTURA DE LA MEMORIA DE DOCTORADO

El presente trabajo pretende ser una contribución al desarrollo de un amplio campo de investigación que se enmarca dentro de la lógica borrosa, y que estudia el problema de la medida.

Esta “Presentación y estructura de la memoria de doctorado” se ha estructurado de la siguiente forma: En el apartado de “Introducción” se presenta de forma general el problema de las medidas borrosas y se comenta el tratamiento de las medidas de μ-T-incondicionalidad, de las medidas de especificidad y de T-transitividad. El siguiente apartado de “Objetivos” expone el objetivo general y los objetivos concretos que se persiguen en esta memoria. El apartado de “Contenidos” expone las ideas que han motivado este trabajo, presentando una breve reseña de los trabajo más significativos, y muy especialmente de aquellos que han servido de punto de partida para esta memoria. Esboza las líneas generales del contenido y la manera en que ésta se organiza, comentando pormenorizadamente cada capítulo, haciendo hincapié en los logros más importantes. El apartado de “Notación” especifica la utilizada a lo largo del trabajo.

1.1. INTRODUCCIÓN

Lotfi A. Zadeh escribe una teoría sobre unos objetos, los conjuntos difusos o conjuntos borrosos, que son “conjuntos” de frontera no precisa y cuya función de pertenencia indica un grado en el intervalo [0, 1]. El primer texto que aparece sobre estos subconjuntos data de 1965 cuando *L. A. Zadeh* publica el artículo *"Fuzzy Sets"* donde crea la base teórica sobre subconjuntos borrosos y de la que parten todas las investigaciones posteriores sobre el tema. La teoría clásica de conjuntos de *Cantor* no recoge aquellos fenómenos reales cuyas características son "imprecisas", "inciertas", "borrosas" o "difusas". En la esfera de los predicados subjetivos, y por tanto imprecisos, la teoría de conjuntos clásica se enfrenta con obstáculos difíciles de superar. Desde que *Zadeh* inventa el concepto de subconjunto borroso en 1965 son muchas las diferentes ramas de investigación de la teoría de subconjuntos borrosos y muy variadas sus aplicaciones en Física, Ingeniería, Estadística, Medicina, Teoría de Grafos, Ciencias Sociales, etc.

El desarrollo de la tecnología computacional ha abierto diversos campos de investigación. Se pretende que una máquina pueda producir razonamientos o acciones que si fuesen realizados por una persona serían considerados inteligentes. En el intento de automatizar el razonamiento y el aprendizaje resultan muy útiles las lógicas borrosas (o difusas).

De la misma manera que la teoría de la medida ha tenido un papel muy importante en las aplicaciones clásicas de las Matemáticas, es de suponer que igual o más importancia debe tener en la teoría de subconjuntos borrosos, en la que muchas de sus aplicaciones demandan resultados teóricos y prácticos y se presenta la necesidad de encontrar nuevas formas de medir aspectos propios de la teoría de subconjuntos borrosos como el grado de borrosidad (entropía) o de nitidez de un conjuntos borroso o el grado de información específica proporcionada por un conjunto borroso dado por la salida de un sistema experto. Para comprender el tratamiento de la información representada mediante conjuntos borrosos se ha trabajado en nuevas medidas que permiten controlar conceptos nuevos como la booleanidad de las lógicas, el grado de verificación del *modus ponens* clásico durante un proceso de inferencia borrosa, el grado de transitividad de una relación borrosa o las medidas de utilidad de una información. Estas medidas ayudan a entender la razón por la que muchas aplicaciones de la lógica borrosa conducen a buenos resultados, y son importantes para describir aspectos fundamentales de la lógica borrosa, como por ejemplo distinguir entre conjuntos borrosos poco nítidos y conjuntos clásicos, o indicar si un conjunto borroso puede ser útil para realizar inferencias o para la toma de decisiones, o saber si un conjunto es normal para evitar que se puedan deducir contradicciones.

En esta memoria se estudian especialmente las medidas de μ-T-incondicionalidad, especificidad y T-transitividad. Estas medidas tienen propiedades muy diferentes. La primera es una medida borrosa como las estudiadas por Sugeno, es decir, monótona respecto de la inclusión conjuntista. Sin embargo la segunda no es monótona respecto de la inclusión conjuntista sino respecto de un preorden existente entre los subconjuntos borrosos, por el cual se puede indicar cuándo un conjunto borroso es más específico que otro. Por último, las medidas de T-transitividad tampoco son monótonas respecto de la inclusión, sino respecto a un preorden entre relaciones borrosas que las ordena según su grado de T-transitividad.

El problema de la medida ha sido desde siempre muy estudiado, y sobre todo cuando los analistas del siglo XIX *Émile Borel* (1871-1956) y *Henri Lebesgue* (1875-1941) se ocuparon de introducir conceptos para poder medir subconjuntos de la recta real, con lo que apareció el concepto de medida de *Lebesgue*. El matemático francés *Henry Poincaré* (1854-1912) introdujo el concepto de dimensión topológica. En 1919 *Hausdorff* definió los conceptos de medida y dimensión que hoy llevan su nombre. En los años 20 *Besicovitch* continuó trabajando en esa dirección y creó las bases para la Teoría Matemática de la Medida, una rama de la Matemática en plena evolución, con muchos problemas abiertos y profundas conexiones con otros campos.

Las medidas aditivas han jugado un papel fundamental en importantes ramas de la Matemática. De la misma manera que es posible hacerse una idea del comportamiento de una distribución de probabilidad con unos pocos parámetros, como por ejemplo la esperanza y la varianza, es preciso analizar cómo poder hacerse una idea general del comportamiento de un conjunto borroso o una relación borrosa mediante ciertos valores que den información sobre algunas de sus principales características. Son ya numerosas las aplicaciones en que son muy útiles medidas que no verifican todas las propiedades que se imponen a las medidas aditivas, como las medidas subaditivas, superaditivas, monótonas respecto la inclusión conjuntista o incluso monótonas respecto de otro preorden diferente, por lo que el estudio de los diversos tipos de medidas ayuda a clasificarlas, caracterizarlas y analizar mejor en qué contextos pueden ser útiles.

Las teorías de razonamiento aproximado e inferencia borrosa están siendo muy aplicadas porque son muchos los contextos en los que se debe obtener información útil a partir de datos incompletos, imprecisos o inciertos. El ser humano puede razonar y tomar decisiones a partir de información que raramente es precisa y que muchas veces puede ser modelizada por generalizaciones del *modus ponens* clásico. La regla composicional de inferencia propuesta por *Zadeh* es muy interesante en muchos entornos, pero no siempre se obtienen conclusiones según *Tarski* o razonamientos que generalicen el *modus ponens*, por lo que se precisa el estudio de diversas propiedades de relaciones borrosas como la reflexividad, la T-transitividad o la μ-T-condicionalidad.

La inferencia borrosa funciona muy bien y tiene muchas aplicaciones en ingeniería, pues tiene un carácter dinámico del que carece la estática lógica clásica, pero puede dar la sensación de que en algunos casos en los que se comprueba que funciona bien sin embargo no se comprende bien porqué. La comprensión de las características y el cálculo de algunas medidas se hace imprescindible para los conjuntos borrosos que sean premisas o conclusiones de inferencias borrosas. Asimismo se hace necesario el estudio de algunas medidas sobre las relaciones borrosas con las que se deduce, como por ejemplo si la inferencia obtenida a partir de un conjunto borroso generaliza el *modus ponens* o si la relación borrosa utilizada es T-transitiva. Por último puede ser interesante estudiar si las conclusiones de la inferencia (que pueden ser un conjunto borroso) son específicas para determinar su utilidad.

En la bibliografía se encuentran trabajos que estudian diferentes maneras de medir la utilidad de una información, como el concepto de medida de especificidad introducido por *Yager*, muy relacionado con el concepto de granularidad de *Zadeh*. *Dubois* y *Prade* introducen el concepto de especificidad mínima, y muestran el papel central de la especificidad en la teoría del razonamiento aproximado. *Higashi* & *Klir* discuten un concepto similar que denominan no-especificidad.

La propiedad de T-transitividad es muy importante en el mundo de inferencia borrosa, pues es una propiedad necesaria para que un conjunto borroso sea un T-preorden o una T-similaridad, propiedades fundamentales por ejemplo, para que las consecuencias inferidas sean consecuencias según Tarski, o para hacer clasificaciones borrosas.

En este trabajo se ha definido una medida de μ-T-incondicionalidad con las siguientes propiedades: Está definida sobre el conjunto de las relaciones borrosas y es monótona respecto de la inclusión conjuntista. Se han probado otras muchas propiedades y caracterizaciones.

También se define en esta memoria otra medida muy diferente, la $\prec$-medida borrosa de especificidad, con propiedades muy distintas, pues está definida sobre el conjunto de los subconjuntos borrosos y claramente no es monótona respecto la inclusión conjuntista, sino que requiere de la existencia de un preorden.

Se aporta un método nuevo de construir relaciones T-transitivas con el que se obtiene una nueva relación T-transitiva contenida en la original y que puede ser utilizado para calcular medidas de T-transitividad. Esta medida está definida sobre el conjunto de relaciones borrosas y es una $\prec$-medida borrosa.

Para extenderlo a estas nuevas aplicaciones se observa que es preciso reflexionar profundamente sobre el concepto de medida imponiendo propiedades menos restrictivas. Por otro lado, las medidas clásicas se definen sobre el conjunto de partes de un conjunto referencial, y ahora será preciso definirlas sobre el conjunto de los subconjuntos borrosos de dicho conjunto referencial.

En la bibliografía se encuentran sugerentes ejemplos que explican la necesidad de utilizar medidas que no tengan la propiedad de la σ-aditividad, y llevan a generalizaciones del concepto de medida, como las medidas convergentes de Sugeno o las medidas monótonas respecto de la inclusión conjuntista. En ocasiones se precisa medir características no relacionadas con la relación de inclusión conjuntista. Para poder medirlas es necesario disponer de una relación de comparación que permita apreciar si un elemento tiene más o menos de esa característica que otro. Esa relación debe tener las propiedades de un preorden. Se denominan $\prec$-medidas borrosas a esas medidas monótonas respecto a un preorden.

1.2. OBJETIVOS DE ESTA MEMORIA

Esta memoria tiene como objetivo general el estudio de algunas medidas borrosas, lo que conduce a reflexionar sobre el concepto de medida.

El objetivo del capítulo 2: "Medidas de μ-T-incondicionalidad de relaciones borrosas" es estudiar varias maneras de medir la propiedad de μ-T-incondicionalidad de relaciones borrosas, que nos indica hasta qué punto la inferencia de un conjunto borroso con una relación borrosa generaliza el *modus ponens*. Esta memoria trata de describir diversas formas coherentes de realizar esta medida y busca la manera de unificarlas en una única medida que se pueda llamar la medida de μ-T-incondicionalidad de relaciones borrosas, de forma que sirva para lograr medir de la forma más adecuada posible la capacidad de las relaciones borrosas para representar reglas imprecisas del tipo "*Si x es P entonces y es Q*".

El capítulo 3 estudia las medidas de especificidad definidas por R. R. Yager por su utilidad como medida de tranquilidad a la hora de tomar una decisión. Sus objetivos se separan en tres partes.

El objetivo de la primera parte es encontrar nuevas fórmulas de medidas de especificidad de conjuntos borrosos discretos y proporcionar una manera de expresar las medidas de especificidad que comprenda a todas las definidas actualmente y en particular las que se están aplicando en ingeniería.

El objetivo de la segunda parte del capítulo 3 es definir unas medidas de especificidad sobre dominios continuos que también comprendan las ya definidas y que proporcionen nuevas fórmulas de medidas de especificidad.

La tercera parte tiene como objetivo buscar nuevas definiciones y métodos algorítmicos que permitan calcular medidas de especificidad bajo similaridades.

El objetivo del capítulo 4 es el estudio de las medidas de la T-transitividad de una relación borrosa. Para ello se define y analiza un algoritmo que proporcione relaciones T-transitivas contenidas en una relación dada.

El capítulo 5 tiene como objetivo sistematizar las conclusiones de este trabajo y analizar los problemas que quedan abiertos y sus posibles vías de solución.

El objetivo del capítulo 6: "Apéndices" es documentar los conocimientos previos para la comprensión y consecución de los objetivos de esta memoria.

En especial el objetivo del apartado: "El concepto de medida: Medidas borrosas e integrales borrosas" es hacer un estudio bibliográfico y recoger las más importantes propiedades y los tipos de medidas conocidos. Estas medidas están siendo utilizadas tanto desde un punto de vista teórico, como en aplicaciones prácticas, y en particular en aplicaciones de ingeniería. Se presentan ejemplos propios y de la bibliografía que permiten percibir la necesidad de su estudio y se aportan gráficos que facilitan su comprensión y clasificación.

Para alcanzar los objetivos expuestos la estructura de este trabajo es la que se presenta en el apartado siguiente.

1.3. CONTENIDOS

El campo de investigación relacionado con las medidas borrosas es de una gran amplitud pues incluye desde problemas teóricos propios de la lógica borrosa, la búsqueda de nuevas medidas borrosas y el estudio de sus propiedades, así como su aplicación en ámbitos de la Inteligencia Artificial. Es un campo de investigación de gran actualidad como lo demuestra el creciente número de trabajos que aparecen cada año.

En esta memoria de doctorado se estudian diversas medidas que resultan muy útiles en el campo de la inferencia borrosa, o en el de la medida de la utilidad de la información en determinados contextos. Se analizan las siguientes medidas: las medidas de μ-T-incondicionalidad de relaciones borrosas, las $\prec$-medidas borrosas de especificidad bajo universos discretos, continuos, utilizando familias de t-normas, negaciones y t-conormas, y $\prec$-medidas borrosas de especificidad cuando la información aumenta mediante una T-indistinguibilidad. Finalmente se propone un nuevo método de T-transitivización de relaciones borrosas a través del cual se definen nuevas medidas de T-transitividad de relaciones borrosas. Termina con una reflexión sobre los diferentes conceptos de medidas y medidas borrosas,

El concepto de medida

El concepto de medida ha jugado un papel importante en el mundo de las matemáticas clásicas, especialmente el concepto de la aditividad, tan importante en medidas como la probabilidad o las medidas de *Lebesgue* y han dado lugar a ramas propias muy importantes en el mundo de las Matemáticas.

Sin embargo muchas disciplinas como la teoría de subconjuntos borrosos, inteligencia artificial, teoría de juegos, teoría de la decisión, economía o psicología han encontrado soluciones especificas en las que también pueden ser útiles algunas medidas no aditivas, como por ejemplo las medidas normales, las medidas convergentes de Sugeno o medidas borrosas que encajan en las nuevas teorías de la evidencia, que definen medidas de credibilidad y plausibilidad con propiedades superaditivas y subaditivas, o las teorías de posibilidad introducidas por *Zadeh* [Zadeh;1978], que definen las medidas de posibilidad utilizando el supremo (en lugar de la suma que utiliza la propiedad aditiva) y las medidas de necesidad utilizando la intersección y el ínfimo. Son también muy importantes las aplicaciones de algunas medidas monótonas, como las λ-medidas borrosas de *Sugeno* o las medidas S-descomponibles, que generalizan tanto a las λ-medidas borrosas como a las medidas de posibilidad. Por último se deben tratar las medidas monótonas respecto de un preorden o $\prec$-medidas borrosas introducidas por *Trillas* y *Alsina* [Trillas & Alsina; 1999], entre las cuales merecen ser mencionadas las entropías o medidas de borrosidad de *De Luca* y *Términi* [1972], las medidas de *Sarkovskii*, las medidas de especificidad de *Yager*, y dos de las medidas que son estudiadas en esta memoria: las $\prec$-medidas borrosas de especificidad de conjuntos borrosos y las medidas de T-transitividad de relaciones borrosas.

Algunas de las medidas mencionadas pueden ser utilizadas en el cálculo de integrales dando lugar a integrales de *Lebesgue*, integrales de *Sugeno* o integrales de *Choquet*.

La teoría de posibilidad propuesta por *Zadeh* es una forma de tratar la incertidumbre alternativa a la teoría de probabilidades que permite utilizar contextos más amplios que las álgebras booleanas de la teoría de probabilidades. La teoría de posibilidad se basa en la imprecisión de los conjuntos, intrínseca por ejemplo en los lenguajes naturales, mientras que la teoría de probabilidades se basa en la aleatoriedad.

Son muchos los artículos de investigación que denominan medidas borrosas a las medidas normales y monótonas respecto de la inclusión conjuntista, es decir, medidas sobre un subconjunto de partes de un universo X que sean medibles, es decir, sobre un espacio $(X, \Im)$, que verifican que $m(\emptyset) = 0$ y que si $A, B \in \Im$ y $A \subseteq B$ entonces $m(A) \leq m(B)$. Algunas de estas medidas son todas las medidas σ-aditivas, como por ejemplo las medidas de probabilidad, las medidas borrosas de Sugeno, como por ejemplo las medidas de posibilidad, las λ-medidas borrosas de Sugeno y las medidas S-descomponibles. El concepto de medida borrosa debe extenderse a un álgebra del conjunto de subconjuntos borrosos del conjunto referencial X, es decir al espacio medible $([0, 1]^X, \Im)$ a la que pertenece una clase de medidas estudiadas y definidas en esta memoria: las medidas de μ-T-incondicionalidad de relaciones borrosas, que se tratan posteriormente.

Trillas y Alsina [1999] introducen una definición más general de medida borrosa basada en que para medir una característica de los elementos de un conjunto es necesario disponer de una relación de comparación que indique para todo par de elementos si uno presenta más esa característica que el otro. De esta manera se definen las $\prec$-medidas borrosas como aplicaciones $m: \Im \rightarrow [0, 1]$ (donde se denomina $\Im$ a un subconjunto del conjunto de partes de X de que sea medible) que verifican que $m(\mathbf{0}) = 0$, $m(\mathbf{1}) = 1$ y que si $x \prec y$ entonces $m(x) \leq m(y)$, donde $\prec$ es un preorden que indica qué elemento representa más una determinada característica que se desea medir, y donde **0** es un elemento minimal y **1** es un elemento maximal respecto del preorden. Cuando $\prec$ es la inclusión conjuntista, estas medidas generalizan a las medidas monótonas, que a partir de esta nueva definición de medidas se denominan medidas monótonas respecto de la inclusión.

Un interesante ejemplo de $\prec$-medida borrosa es la entropía o medida de borrosidad de conjuntos borrosos, que trata de medir la característica de en qué grado un conjunto es borroso o es nítido. En este caso el preorden $\prec$ es el conocido orden 'sharpened' en el que un conjunto es más borroso que otro si sus grados de pertenencia se aproximan más al valor ½. *De Luca* y *Termini* [1972] definen estas medidas axiomáticamente, *Kaufmann* [1975] las define como una distancia normalizada y *Yager* [1979] basa su medida de borrosidad en la distancia entre el conjunto y su complementario.

En esta memoria se trabajan otros dos ejemplos de $\prec$-medidas borrosas: las $\prec$-medidas borrosas de especificidad de conjuntos borrosos, cuyo preorden $\prec$ clasifica los conjuntos borrosos según sean más específicos o sean más cercanos a tener un único elemento con grado de pertenencia uno, y las medidas de T-transitividad de relaciones borrosas, cuya característica $\prec$ clasifica las relaciones borrosas según que las relaciones sean más próximas a sus relaciones T-transitivizadas.

Medidas de μ-T-incondicionalidad.

Las relaciones borrosas que se utilizan para hacer inferencia borrosa deben generalizar la propiedad del *modus ponens*. Una interesante manera de generalizar esta necesaria propiedad es mediante la propiedad de μ-T-condicionalidad de relaciones borrosas, que constituye una de las definiciones de *modus ponens* generalizado más coherentes y reconocidas mundialmente.

La definición de *Enric Trillas* [Trillas; 1993] de esta propiedad es la siguiente: Sean E_1, E_2 dos conjuntos y sea E el conjunto $E_1 \cup E_2$. Sea μ: $E \rightarrow [0, 1]$ un conjunto borroso y sea T una t-norma continua. Una relación borrosa R:

$E_1\times E_2 \rightarrow [0, 1]$ se dice que es μ-T-condicional si y sólo si $T(\mu(a), R(a, b))\leq\mu(b)$ para todo (a, b) en $E_1\times E_2$.

En la memoria se proponen dos maneras diferentes de construir medidas cuyo objetivo es medir en qué grado una relación satisface o no la propiedad de μ-T-incondicionalidad. Un primer método consiste en calcular una distancia generalizada entre una relación borrosa R y la mayor relación borrosa μ-T-incondicional contenida en R. El otro método calcula las distancias en cada punto (a, b) entre $T(\mu(a), R(a, b))$ y $\mu(b)$. En ambos casos se definen estas medidas utilizando una distancia generalizada no conmutativa, logrando que las distancias puntuales sólo sean positivas en los puntos en que la relación no satisface la propiedad puntual de μ-T-incondicionalidad.

Estas dos formas de medir la μ-T-incondicionalidad dan, en general, resultados diferentes para los mismos conjuntos borrosos, por lo que resulta interesante estudiar en qué casos los resultados coinciden. Se prueba que si se elige una distancia generalizada no conmutativa a partir del complemento $1\text{-}J^T$ de un operador residual de una t-norma continua T, ambos métodos de medir la μ-T-incondicionalidad coinciden puntualmente, por lo que ambas familias de medidas son iguales.

Es decir, para demostrar que ambas medidas resulten iguales al utilizar la distancia $1\text{-}J^T$ se debe verificar, para toda t-norma continua, y para cada punto (a, b) de $E_1\times E_2$, que la distancia $1\text{-}J^T$ entre una relación borrosa R en el punto (a, b) y su relación μ-T-incondicionalizada en (a, b) es igual a la distancia $1\text{-}J^T$ entre $T(\mu(a), R(a, b))$ y $\mu(b)$ en cada punto (a, b) de $E_1\times E_2$, es decir, se debe verificar que $J^T(R(a, b), J_\mu{}^T(a, b)) = J^T(T(\mu(a), R(a, b)), \mu(b))$ en cada punto (a, b) de $E_1\times E_2$ para toda t-norma continua T. Una vez probado esto se pueden definir distintas medidas de μ-T-incondicionalidad de forma independiente al método utilizado.

Así mismo, al lograr este primer objetivo de unificación de ambos métodos, parece interesante estudiar de forma más detenida ejemplos de medidas de μ-T-incondicionalidad de los más conocidos operadores (tomando como caso particular $E_1 \times E_2 = [0, 1] \times [0, 1]$) para las t-normas principales, como por ejemplo, las medidas de μ-T-incondicionalidad de los principales operadores de implicación residuales, S-implicaciones, QM-implicaciones y conjunciones que se utilizan para realizar inferencias borrosas sin saber, en muchos casos, si se verifica la propiedad de μ-T-incondicionalidad.

La definición de una única medida de μ-T-incondicionalidad de relaciones borrosas también puede ser útil, simplemente para determinar si realizando inferencia con una determinada t-norma continua se generaliza el *modus ponens* clásico.

Medidas de especificidad de Yager

El concepto de medida de especificidad introducido por *Yager* [R. R. Yager; 1982] para medir la característica de los conjuntos borrosos consistente en parecerse a un conjunto clásico de un elemento y sólo uno.

Si "*x* es A" es una proposición, entonces la especificidad de A debe entenderse como la cantidad de información útil o adecuada que contiene dicha proposición. Juega, por tanto, un papel importante en la ingeniería de la información al proporcionar una medida de la cantidad de información contenida en un subconjunto borroso.

Las medidas de especificidad de *Yager* sobre un universo finito X son funciones Sp: $[0, 1]^X \rightarrow [0, 1]$ que verifican que la medida de especificidad de un conjunto borroso es uno si y sólo si A es un conjunto clásico de un único elemento, la medida de especificidad del conjunto vacío es cero, que medida de especificidad de un conjunto borroso crece si aumenta el mayor valor de pertenencia, y decrece si aumentan los otros valores de pertenencia.

Asimismo *Yager* introduce los conceptos de medida de especificidad más estricta, más crítica y medida de especificidad regular.

$\prec$-Medidas borrosas de especificidad en universos finitos

Uno de los objetivos principales de esta memoria es intentar proporcionar una fórmula general de medida de especificidad que incluyese todas las medidas de especificidad que se encuentran en la literatura. A dicha expresión se le denomina $\prec$-medida borrosa de especificidad.

Dicha fórmula general de medida de especificidad ha sido definida mediante t-normas, t-conormas y negaciones. La expresión tiene un mayor interés, pues permite de forma muy sencilla generar gran cantidad de medidas de especificidad combinando los conectivos más conocidos y obteniendo la expresión más interesante que pueda ser aplicada en cada caso concreto.

Una aproximación a la idea de especificidad de *Yager* de que los conjuntos de mayor especificidad son los singletones podría ser expresada por una medida general inspirada por la siguiente expresión lógica: 'un elemento (el de mayor grado de pertenencia) y la negación de la unión del resto de elementos'. Esta idea se puede definir fácilmente con t-normas, t-conormas y negaciones como se hace en la formula propuesta a continuación.

Se pretende que la especificidad de un conjunto borroso sea alta si "tiene al menos un elemento **y** no tiene mucho más que un elemento". Tener "al menos un elemento" se representa por el mayor valor de pertenencia a_1; la cópula ***"y"*** por la t-norma T_1; y una medida del grado en que A "no tiene mucho más que un elemento" por $N(P_A)$, donde $P_A = S_{j=2,..,d}\{T_3(a_j, w_j)\}$ indica que A "tiene mucho más que un elemento".

Si A es un subconjunto borroso de un conjunto referencial finito $X=\{e_i\}$ con d elementos, y si b_i son los valores de pertenencia de los elementos de X tal que $A(e_i)=b_i$. Los valores de pertenencia $b_i \in [0, 1]$ se ordenan totalmente siendo

a_j el j-ésimo mayor valor de pertenencia de A. Sea N una negación, T_1 y T_3 t-normas, S una t-conorma generalizada, y sea $\{w_j\}$ un conjunto de pesos. Se define la **$\prec$-medida borrosa de especificidad** como la aplicación ME definida sobre un subconjunto medible del conjunto de subconjuntos borrosos de X, $\Im \subset [0, 1]^X$, ME: $\Im \rightarrow [0, 1]$ definida por $ME(A) = T_1(a_1, N(S_{j=2,..,d}\{T_3(a_j, w_j)\})) = T_1(a_1, N(P_A))$.

Se demuestra que la $\prec$-medida borrosa de especificidad verifica las siguientes propiedades: la $\prec$-medida borrosa de especificidad de un singleton es uno, la $\prec$-medida borrosa de especificidad del conjunto vacío es cero, crece cuando crece el mayor grado de pertenencia y decrece cuando crecen el resto de valores de pertenencia. Es decir, la $\prec$-medida borrosa de especificidad verifica todos los axiomas de la medida de especificidad definida por Yager excepto que la medida sea uno si y sólo si el conjunto borroso es un singleton.

Se dice que la $\prec$-medida borrosa de especificidad es adecuada si toma el valor uno si y sólo si el conjunto borroso es un singleton, y estas $\prec$-medidas borrosas de especificidad cumplen todos los axiomas de medida de especificidad de *Yager*. Se demuestra que una $\prec$-medida borrosa de especificidad es adecuada si la t-norma T_3 es positiva y el peso w_2 es distinto de cero. También se demuestra que si la t-norma T_3 es de la familia de *Łukasiewicz* y el peso w_2 es igual a uno entonces la $\prec$-medida borrosa de especificidad es adecuada. Estos resultados pueden resultar útiles, pues consiguen obtener criterios sencillos para construir medidas de especificidad de *Yager* seleccionando las t-normas y los pesos de la definición de $\prec$-medida borrosa de especificidad.

Se obtiene varios resultados interesantes de la definición de $\prec$-medida borrosa de especificidad. Por ejemplo, si A y B son subconjuntos borrosos normales y $A \subset B$ entonces $ME(A) \geq ME(B)$. Si A y B son subconjuntos clásicos no vacíos de X y $card(A) \geq card(B)$ entonces $ME(A) \leq ME(B)$. Es decir, al igual que las medidas de especificidad de *Yager*, las $\prec$-medida borrosa de especificidad pueden entenderse sobre los conjuntos clásicos no vacíos como una medida inversa a la cardinalidad. Otras propiedades que pueden demostrarse son las siguientes: Si A es un subconjunto clásico con m elementos $1< m \leq n$ entonces ME(A) = N(S{w_2, ..., w_m}).

Interesa también conocer cuándo una $\prec$-medida borrosa de especificidad es regular, es decir, si X es el conjunto referencial su $\prec$-medida borrosa de especificidad es cero. Se prueba que si A=X y *Máx*{w_2, ..., w_n} = 1 entonces ME(X) = 0. Si A = X, S es la t-conorma de *Łukasiewicz* y $\sum_{j=2}^{d} w_j = 1$, entonces ME(X) = 0.

Una expresión que resulta útil se obtiene si se denomina a la t-norma $T_3 = \wedge$ y $S = \vee$ a su t-conorma dual respecto de la negación ' entonces ME(A) = $T_1\{a_1, (a_2'\vee w_2')\wedge\ldots\wedge(a_n'\vee w_n')\}$, y si $T_1 = T_3 = \wedge$ entonces ME(A) = $a_1 \wedge (a_2' \vee w_2') \wedge \ldots \wedge (a_n' \vee w_n')$. Esta expresión realmente da una idea de cómo la $\prec$-medida borrosa de especificidad puede venir expresada de forma sencilla con conectivos lógicos.

Si dos $\prec$-medidas borrosas de especificidad ME y ME* son de la misma clase, es decir, si están definidas mediante las mismas t-normas T_1 y T_3, la misma t-conorma S y la misma negación N, y ME es más crítica que ME* entonces ME es más estricta que ME*.

Se muestra cómo todos los ejemplos de medidas de especificidad utilizados por *Yager* son $\prec$-medida borrosa de especificidad. Por ejemplo, La medida de especificidad lineal de *Yager* definida por Sp(A) = $a_1 - \sum_{j=2}^{d} w_j\ a_j$ donde a_j es el j-ésimo mayor valor de pertenencia de A y $\{w_j\}$ es un conjunto de pesos, es una $\prec$-medida borrosa de especificidad tomando T_1 la t-norma de *Łukasiewicz*, N la negación usual, S su t-conorma dual y T_3 la t-norma producto. Ejemplos de las medidas lineales de especificidad de Yager más y menos estrictas son Sp(A) = $a_1 - a_2$ y Sp(A)= $a_1 - \frac{1}{n-1}\sum_{j=2}^{d} a_j$, que también son $\prec$-medida borrosa de especificidad.

Es interesante estudiar las medidas de especificidad desde la perspectiva de los problemas de toma de decisiones multi-criterio. La medida de especificidad de *Yager* [Yager; 1990] definida por Sp(A) = $a_1 \prod_{j=2}^{d} (ka_j + (1-a_j))$ donde $k \in [0, 1)$ puede ser útil para los problemas de toma de decisiones multi-criterio, donde se requiere una medida de especificidad para conocer si existe un elemento con valor de pertenencia uno y todos los demás con valor cero. Claramente esta medida de especificidad de *Yager* puede ser generalizada por la expresión ME(A) = $a_1 \prod_{j=2}^{d} (1- w_j a_j)$ donde $w_j \in (0, 1]$, que también es una $\prec$-medida de especificidad tomando las t-normas y t-conorma del producto y la negación usual. Sin embargo ésta última $\prec$-medida borrosa de especificidad no es regular.

$\prec$-Medidas borrosas de especificidad en universos finitos definidas mediante familias de t-normas, t-conormas y negaciones.

Es importante estudiar en qué casos las $\prec$-medidas de especificidad son más o menos estrictas cuando las t-normas T_1 y T_3, la t-conorma S o la negación N son modificadas por otras diferentes. De esta forma se comprueba que si $T_1 \leq T'_1$ entonces $ME(T_1, N, S, T_3)(A)$ es más estricta que $ME(T'_1, N, S, T_3)(A)$. Si $T_3 \leq T'_3$ entonces $ME(T_1, N, S, T_3)(A)$ es menos estricta que $ME(T_1, N, S, T'_3)(A)$. Si $S \leq S'$ entonces $ME(T_1, N, S, T_3)(A)$ es menos estricta que $ME(T_1, N, S', T_3)(A)$. Si $N \leq N'$ entonces $ME(T_1, N, S, T_3)(A)$ es más estricta que $ME(T_1, N', S, T_3)(A)$.

Se estudian nuevas expresiones utilizando familias de t-normas, familias de negaciones y familias de t-conormas. La familia de t-normas de una t-norma T está formada por el conjunto de t-normas de la forma $T_\varphi(x, y) = \varphi^{-1}(T(\varphi(x), \varphi(y))$ para toda función biyectiva $\varphi:[0, 1] \to [0, 1]$ con $\varphi(0)=0$ y $\varphi(1)=1$.

Si definimos las $\prec$-medidas borrosas de especificidad según las t-normas, t-conorma y negación de la forma $ME_{(T_1, N, S, T_3)}(A) = T_1(a_1, N(S_{2..d}\{T_3(a_j, w_j)\}))$, se pueden demostrar algunos resultados utilizando las familias, como por ejemplo los siguientes:

- $ME_{(T_1, N', (T^{*N})_\varphi, T_3)}(A) = ME_{(T_1, N', (T_\varphi)^{*N_\varphi}, T_3)}, T_3)(A)$.
- $ME_{(T_1, N', (T^{*N_{\varphi^{-1}}})_\varphi, T_3)}(A) = ME_{(T_1, N', (T_\varphi)^{*N}, T_3)}(A)$.
- Si la negación N es involutiva se tiene que $ME_{(T_1, N, (T^{*N_{\varphi^{-1}}})_\varphi, T_3)}(A) = T_1(a_1, T_{\varphi\, 2..d}\{NT_3(a_j, w_j)\})$.
- $ME_{(T_1, N, S, T_{3\varphi})}(A) = T_1(a_1, N(S_{2..d}\{\varphi^{-1}T_3(\varphi(a_j), \varphi(w_j))\}))$
- $ME_{(T_1, N, S_\varphi, T_{3\varphi})}(A) = T_1(a_1, N\varphi^{-1}S_{2..d}\{T_3(\varphi(a_j), \varphi(w_j))\})$
- $ME_{(T_1, N_\varphi, S_\varphi, T_{3\varphi})}(A) = T_1(a_1, \varphi^{-1}NS_{2..d}\{T_3(\varphi(a_j), \varphi(w_j))\})$
- $ME_{(T_{1\varphi}, N_\varphi, S_\varphi, T_{3\varphi})}(A) = \varphi^{-1}T_1(\varphi(a_1), N\, S_{2..d}\{T_3(\varphi(a_j), \varphi(w_j))\})$.

Estas expresiones pueden proporcionar una enorme cantidad de ejemplos de $\prec$-medidas borrosas de especificidad, muchas de ellas medidas de especificidad de Yager, que difícilmente se pudiesen haber imaginado sin la expresión de $\prec$-medida borrosa de especificidad.

$\prec$-Medidas borrosas de especificidad en universos infinitos

Yager define [Yager; 1998] una medida de especificidad en dominios continuos como $Sp(A) = \int_0^{\alpha_{max}} F(M(A_\alpha))\, d\alpha$, donde α_{max} es el máximo grado de pertenencia en A y F es una función definida de [0, 1] $\rightarrow$ [0, 1] con las siguientes propiedades: F(0)=1, F(1)=0 y $F(x) \leq F(y) \leq 0$ si x>y. Propone un ejemplo sobre X = [0, 1] para el conjunto borroso siendo M una medida de *Lebesgue-Stieltjes* y F(z) = 1 − z. Explica como en algunos casos su medida sobre un conjunto borroso A puede verse según la expresión $\alpha_{max} - \frac{\text{área bajo A}}{b-a}$.

De forma análoga al caso finito, las medidas de especificidad de *Yager* sobre universos infinitos puede ser generalizada de la siguiente manera:

Sea X un universo continuo. Sea A un subconjunto borroso de dicho universo cuyo máximo valor de pertenencia es α_{max} y sea A_α su subconjunto de nivel α. Sean T_1 y T_2 dos t-normas y N una negación. Sea M una medida borrosa según *Nguyen* y *Walker* [Nguyen & Walker; 1996].

Se define la $\prec$-medida borrosa de especifidad de un subconjunto borroso A sobre un conjunto referencial continuo por:

$$ME(A) = T_1(\alpha_{max}, N(\int_0^{\alpha_{max}} T_2(M(A_\alpha), d\alpha)))$$

donde la integral es una integral de *Choquet*.

El ejemplo de *Yager* es generalizable según esta nueva expresión tomando como T_2 la t-norma producto, N la negación N(x)=1−x, T_1 es la t-norma de *Łukasiewicz*, y M es la medida de *Lebesgue* dada por la longitud. Se observa que *Yager* introduce la negación, a la que nombra F, dentro del signo integral. Al utilizar en los ejemplos una función lineal para la negación N el resultado es el mismo que en nuestro caso. Sin embargo si se utiliza otra negación el resultado es distinto.

Se demuestra bajo que condiciones la nueva expresión de ME es una $\prec$-medida borrosa de especificidad.

Si la medida borrosa M verifica que M(B) = 0 si y sólo si B es el conjunto vacío o un conjunto clásico de un único elemento, N es una negación fuerte y T_2 es una t-norma positiva entonces la $\prec$-medida borrosa de especificidad es una medida de especificidad de *Yager*.

Se comprueban propiedades como que si A es un conjunto clásico entonces $ME(A)= N(\int_0^1 T_2(M(A_\alpha), d\alpha))$.

Es interesante observar que ME es una $\prec$-medida borrosa de especificidad regular.

Se ofrecen numerosos ejemplos de las nuevas $\prec$-medidas borrosas de especificidad sobre universos continuos para diferentes conjuntos borrosos sobre dominios continuos, representando gráficamente dichos conjuntos y observando los valores de la $\prec$-medida borrosa de especificidad.

Finalmente se estudian distintas expresiones de $\prec$-medidas borrosas de especificidad sobre universos infinitos obtenidas al sustituir una de las t-normas o la negación por otra de la familia definida mediante una biyección φ. Se confeccionan tablas que resumen los ejemplos de dichas transformaciones sobre algunos conjuntos borrosos representados sobre el intervalo [0, 1] que reflejen el efecto de dichas transformaciones en los resultados finales de $\prec$-medidas borrosas de especificidad.

$\prec$-*Medidas borrosas de especificidad en universos infinitos utilizando la integral de Sugeno*

Se estudia el efecto de utilizar una integral de *Sugeno* en la definición de $\prec$-medidas borrosas de especificidad sobre universos infinitos en lugar de utilizar la integral de *Choquet*. En este caso se demuestra que utilizando una integral de *Sugeno*, la $\prec$-medida borrosas de especificidad sobre universos infinitos también es una medida de especificidad según *Yager*.

Por ejemplo, si T_1 y T_2 son la t-norma mínimo, N es la negación usual y M es la medida de *Lebesgue* entonces utilizando la integral de *Sugeno* se obtiene que $ME(A) = \text{Mín}(\alpha_{max}, 1-\text{Sup}_{\alpha\in[0, 1]} \{\text{Mín}(M(A_\alpha), \alpha)\})$.

Se ofrece otro cuadro con las $\prec$-medidas borrosas de especificidad sobre universos infinitos utilizando la integral de *Sugeno* para las principales t-normas y para los mismos conjuntos borrosos que se han utilizado anteriormente.

$\prec$-*Medidas borrosas de especificidad bajo indistinguibilidades*

Las medidas de especificidad y $\prec$-medidas borrosas de especificidad de un conjunto borroso o una distribución de posibilidad pueden ser utilizadas para medir un grado de utilidad de la información que contienen en un entorno de toma de decisiones. Cuando también se conoce una relación de T-indistinguibilidad o una T-similaridad sobre el producto cartesiano del conjunto universal se incrementa la cantidad de información disponible y, por lo tanto, también aumenta la tranquilidad en la toma de decisiones, pues la T-indistinguibilidad puede indicar que algunas de las decisiones son similares y el número de clases de opciones puede ser menor que el de opciones.

Yager [Yager; 1991] introdujo el concepto de especificidad bajo similaridades a través del problema de la chaqueta: considérese el problema de decidir que chaqueta ponerse cuando se sabe que la temperatura es superior a

15°C. Esta información no es muy específica, pero si indica que chaqueta ponerse con tranquilidad, es decir, es una información específica a la hora de decidir una chaqueta. Para construir este nuevo tipo de medidas de especificidad, *Yager* utiliza en concepto de similaridad o Min-indistinguibilidad introducido por *Zadeh* [Zadeh; 1971]. El subconjunto de nivel α de una relación de similaridad S es una relación de equivalencia clásica denotada S_α. Sea π_α el conjunto de clases de equivalencia de S para un nivel α dado. Sea μ_α/S el subconjunto de clases de equivalencia de π_α definido de la siguiente forma: La clase $\pi_\alpha(i)$ pertenece a μ_α/S si existe un elemento x contenido en $\pi_\alpha(i)$ y en μ_α. *Yager* define la medida de especificidad de un conjunto borroso μ sobre una similaridad S como $S_p(\mu/S) = \int_0^{\alpha_{max}} \frac{1}{Card(\mu_\alpha / S)} d\alpha$.

Sin embargo esta definición sólo es válida cuando la información aumenta añadiendo una similaridad, pues si se utiliza una T-indistinguibilidad con otra t-norma T diferente del mínimo, el subconjunto de nivel α de una T-indistinguibilidad S no es una relación de equivalencia clásica, por lo que la definición de *Yager* no es válida.

Lo primero que debe hacerse para afrontar este problema es axiomatizar las medidas de especificidad bajo una T-indistinguibilidad S. Estas deben verificar que $Sp(\{x\} / S) = 1$, $Sp(\emptyset / S) = 0$, $Sp(\mu / Id) = Sp(\mu)$ y que $Sp(\mu / S) \geq Sp(\mu)$. El primer axioma indica que si μ es un singletón entonces la medida de especificidad de μ bajo S es 1. El segundo axioma muestra que cuando μ es el conjunto vacío entonces la especificidad de μ bajo S es 0. En este caso no se tiene información para tomar una decisión. El tercer axioma impone que cuando S es la relación identidad entonces la especificidad de μ bajo S es igual a la especificidad de μ, pues cada elemento de X es una clase de S. El cuarto axioma añade que cuando aumentamos nuestra información con una medida de T- indistinguibilidad, el grado de especificidad aumenta porque el número de clases entre las que decidir puede ser menor al de opciones cuando algunas de estas son similares.

Se ofrecen dos enfoques para la definición de nuevas medidas de especificidad bajo indistinguibilidades que verifiquen dichos axiomas. El primer enfoque se basa en ofrecer medidas definidas mediante fórmulas, por ejemplo, a partir de una familia de t-normas, t-conormas y negaciones, en cuyo caso se debe estudiar en que casos la medida obtenida es una $\prec$-medida borrosa de especificidad adecuada.

La segunda se basa en definir algoritmos, por ejemplo, calculando la especificidad de las clases de la T-indistinguibilidad independientes de inferencia, es decir, calculando mediante un algoritmo algunas clases de cuyos elementos no se puedan inferir elementos de otra clase aplicando la regla composicional Sup-T con la T-indistinguibilidad. Cada clase puede ser representada por un elemento que los represente a todos, por ejemplo, el elemento x_i μ-T-S-representa la clase de x_j, y se denota $\mathbf{x_i} \succeq_{\mu\text{-T-S}} \mathbf{x_j}$, si y sólo si $T(\mu(x_i), S(x_i, x_j))) \geq \mu(x_j)$.

Se demuestra que la relación clásica $\succeq_{\mu\text{-T-S}}$ sobre X×X es una relación reflexiva y transitiva, es decir, es preorden clásica sobre X×X. De esta forma las clases independientes de inferencia están bien definidas y representadas por un único elemento.

Es útil definir algoritmos que calculen estas clases independientes de inferencia y demostrar que la especificidad bajo indistinguibilidad, que se calcula mediante la especificidad de dichas clases, verifican los cuatro axiomas de medidas de especificidad bajo indistinguibilidades.

Nueva medida de T-transitividad de relaciones borrosas

La propiedad de T-transitividad es muy importante en el mundo de inferencia borrosa, pues es una propiedad necesaria para que una relación borrosa sea un T-preorden, fundamental para que las consecuencias inferidas sean consecuencias según *Tarski*, o que una relación sea una similaridad o una T-indistinguibilidad, que pueda ser utilizada, por ejemplo, para clasificación borrosa o análisis cluster borroso.

Existen varias maneras conocidas de obtener el famoso cierre T-transitivo de una relación borrosa, que es una relación T-transitiva que contiene a la relación original. Sin embargo esta relación no tiene porqué ser la relación T-transitiva más cercana a la relación dada.

Es interesante idear algoritmos que a partir de una relación borrosa nos proporcionen una relación T-transitiva incluida en la inicial. Sin embargo, pueden ser varias las relaciones T-transitivizadas incluidas en la inicial, mientras que el cierre T-transivo de una relación es único.

Una vez se tiene definido un algoritmo para conseguir relaciones T-transitivas ya es posible definir medidas de T-transitividad de relaciones borrosas midiendo la diferencia entre la relación borrosa y su relación T-transitivizada mediante cualquier distancia o distancia generalizada, obteniendo una medida diferente a la que se obtendría midiendo la distancia entre la relación dada y su cierre T-transitivo.

Se prueba que si el universo es finito, el nuevo algoritmo de T-transitivización de relaciones borrosas es computable, y que la salida es una relación T-transitiva.

Una vez se tiene la relación T-transitivizada R_T se definen unas nuevas medidas de T-transitividad baja de relaciones borrosas a partir de una distancia d y una t-conorma S como $M_{T\text{-}S}{}^{d}(R) = 1 - S_{(a,\ b) \in E \times E}\{d(R(a, b), R_T(a, b))\}$ y se analizan sus propiedades.

Para terminar, el capítulo 5 recoge las principales conclusiones extraídas del trabajo realizado y algunos de los problemas que han quedado abiertos.

La memoria se completa con un capítulo 6: "Apéndices" en el que se presenta un compendio de los conocimientos previos necesarios para comprender esta memoria, especialmente del concepto de medida borrosa.

1.4. NOTACIÓN

A lo largo de este trabajo se empleará la siguiente notación:

- Al conjunto referencial o universo se le denota por X, y en ocasiones por E.
- Al subconjunto borroso en estudio se le denota por A, B... y también por μ.
- A_α y μ_α denotan los subconjuntos de nivel α o α-cortes.
- T denota una t-norma, N una negación y S o T* una t-conorma.
- Por J^T se denota a la relación residuada definida mediante la t-norma T.
- Por $\wp$ se denota una σ-álgebra de partes del conjunto referencial y por $\Im$ se denota el conjunto de subconjuntos borrosos medibles de un conjunto referencial.

CAPÍTULO 2:

MEDIDAS DE μ-T-INCONDICIONALIDAD DE RELACIONES BORROSAS

2.1. INTRODUCCIÓN

Las relaciones borrosas que se utilizan para hacer inferencia borrosa deben generalizar la propiedad del *modus ponens*. Una interesante manera de generalizar esta necesaria propiedad es mediante la propiedad de μ-T-condicionalidad de relaciones borrosas [Trillas; 1993] (ver en el apéndice 6.4), que constituye una de las definiciones de *modus ponens* generalizado más coherente y reconocida mundialmente.

En algunos contextos se han utilizado relaciones que no verifican esta propiedad para hacer inferencias. Por ejemplo, es muy común encontrar en muchas aplicaciones de la lógica borrosa que se hacen inferencias borrosas con la t-norma mínimo y una relación borrosa que no es μ-Min-condicional, como por ejemplo una relación borrosa basada en el operador residual J^W. En este caso parece útil conocer hasta que punto se puede considerar que una inferencia realizada mediante dicha relación borrosa no generaliza el *modus ponens*. Incluso en algunos contextos dichas relaciones podrían ser utilizadas con éxito porque puedan favorecer otras características, como por ejemplo las basadas en la información obtenida, como la entropía o la especificidad de los conjuntos borrosos que se obtienen de dicha inferencia o la W-transitividad de la relación borrosa con la que se infiere, también muy deseable. Este capítulo ofrece resultados originales sobre cómo medir la propiedad de μ-T-incondicionalidad (o no μ-T-condicionalidad) de relaciones borrosas, aportando y analizando diferentes métodos que nos proporcionen una medida de la propiedad de μ-T-incondicionalidad de una relación borrosa.

En este capítulo se proponen dos maneras diferentes de construir medidas borrosas cuyo objetivo es medir en qué grado una relación satisface o no la propiedad de μ-T-incondicionalidad [Garmendia; 1997]. Un primer método consiste en calcular una distancia generalizada entre la relación borrosa R dada y la mayor relación borrosa μ-T-condicional contenida en R. El otro método consiste en calcular las distancias en cada punto (a, b) entre T(μ(a), R(a, b)) y μ(b). En ambos casos se definen estas medidas borrosas utilizando una distancia generalizada no conmutativa, logrando que las distancias puntuales sólo sean positivas en los puntos en que la relación no satisface la propiedad puntual de μ-T-incondicionalidad.

Se prueba que si se elige una distancia generalizada no conmutativa a partir del complemento $1\text{-}J^T$ de un operador residual de una t-norma continua T, ambos métodos de medir la μ-T-incondicionalidad coinciden puntualmente, por lo que con ambas familias de medidas borrosas se obtiene el mismo resultado.

2.2. PRELIMINARES.

En este apartado se tratan algunas nociones previas que permitan facilitar la lectura del resto del capítulo

Definición 2.2.1

Se denomina T_R^{μ} a la relación borrosa definida por:

$$\mathbf{T_R^{\mu}\ (a, b) = T(\mu(a), R(a, b)).}$$

Definición 2.2.2

Se define la relación borrosa $J_\mu^T(a, b)$ en cada punto como $J^T(\mu(a), \mu(b))$, donde J^T es la operación residuada de la t-norma T, definida por $J^T(x, y) = \mathrm{Sup}\{z: T(x, z) \leq y\}$ (Ver apéndice).

Se prueba que $1\text{-}J^T$ es una T*-distancia generalizada (Ver apéndice).

Definición 2.2.3

La **relación μ-T-condicionalizada** de una relación borrosa R, que se denota por $R_C^{\mu\text{-}T}$, se define de la siguiente manera:

$$R_C^{\mu\text{-}T}(a, b) = \mathrm{Min}(R(a, b), J_\mu^T(a, b)) = \begin{cases} R(a, b) & \text{si } T_R^\mu(a, b) \leq \mu(b) \\ J_\mu^T(a, b) & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Definición 2.2.4

Se define la **región de μ-T-incondicionalidad** de una relación borrosa como el subconjunto de $E_1 \times E_2$ en que la relación no es μ-T-condicional puntualmente, y se denota $INC_T^\mu(R)$.

Es decir, $INC_T^\mu(R) = \{(a, b) \in E_1 \times E_2 \text{ tal que } T(\mu(a), R(a, b)) > \mu(b)\}$

$= \{(a, b) \in E_1 \times E_2 \text{ tal que } T_R^\mu(a, b) > \mu(b)\}$

$= \{(a, b) \in E_1 \times E_2 \text{ tal que } R(a, b) > J_\mu^T(a, b)\}$.

Observación:

Algunas condiciones necesarias para que un punto (a, b) de $E_1 \times E_2$ pertenezca a $INC_T^\mu(R)$ son las siguientes:

(1) $R(a, b) > R_C^{\mu\text{-}T}(a, b) = J_\mu^T(a, b)$.

(2) $T_R^\mu(a, b) = T(\mu(a), R(a, b)) > \mu(b)$.

(3) $\mu(a) > \mu(b)$.

Las condiciones (1) y (2) son necesarias y suficientes para que $(a, b) \in INC_T^\mu(R)$.

Nomenclatura:

Sea φ: $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua estrictamente creciente tal que $\varphi(0)=0$ y $\varphi(1)=1$

Sea $\varphi\mu$: $E \rightarrow [0, 1]$ el conjunto borroso definido por $\varphi\mu(a) = \varphi(\mu(a))$.

Sea φR: $E_1 \times E_2 \rightarrow [0, 1]$ la relación borrosa definida por $\varphi R(a, b) = \varphi(R(a, b))$.

Utilizando las anteriores definiciones se denota:

$T\varphi(x, y) = \varphi^{-1}T(\varphi(x), \varphi(y))$

$J^{T\varphi}(x, y) = \text{Sup}\{z: T\varphi(x, z) \leq y\}$

$J_\mu^{T\varphi}(a, b) = \text{Sup}\{z: T\varphi(\mu(a), z) \leq \mu(b)\}$

$(T\varphi)^\mu{}_R(a, b) = T\varphi\{\mu(a), R(a, b)\}$

$J^T{}_{\varphi\,\mu}(a, b) = \text{Sup}\{z: T(\varphi\mu(a), z) \leq \varphi\mu(b)\}$

$(T)_{\varphi\,R}{}^{\varphi\mu}(a, b) = T(\varphi\mu(a), \varphi R(a, b)\}$

$J^T{}_\varphi(x, y) = \varphi^{-1}J^T(\varphi(x), \varphi(y))$

donde $(a, b) \in E_1 \times E_2$ y $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Dado un conjunto borroso μ: E $\rightarrow$ [0, 1], se define una nueva relación borrosa

$$\mu_2: E_1 \times E_2 \rightarrow [0, 1] \text{ como } \mu_2(a, b) = \mu(b).$$

Es decir, μ_2 es la proyección sobre la segunda componente.

2.3. *μ-T-INCONDICIONALIDAD DE RELACIONES BORROSAS.*

En este apartado se prueba que en cada punto (a, b) de $E_1 \times E_2$ se verifica que $J^T(R(a, b), J_\mu{}^T (a, b))$ es igual a $J^T(T_R{}^\mu (a, b), \mu_2(a, b))$, lo que permite unificar dos formas distintas de medir la incondicionalidad de relaciones borrosas.

TEOREMA 2.3.1

Sea T una t-norma continua. La distancia 1-J^T entre una relación borrosa R en el punto (a, b) y su relación μ-T-condicionalizada en (a, b) es igual a la distancia 1-J^T entre $T_R{}^\mu(a, b)$ y $\mu_2(a, b)$ en cada punto (a, b) de $E_1 \times E_2$.

Es decir, se verifica que $J^T(R(a, b), J_\mu{}^T (a, b)) = J^T(T_R{}^\mu (a, b), \mu_2(a, b))$ en cada punto (a, b) de $E_1 \times E_2$.

La demostración es trivial a partir de los lemas 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4 y 2.3.5 en los que se prueba la igualdad para cada una de las t-normas continuas o familias de t-normas continuas. ∎

Lema 2.3.1

Sea R una relación borrosa y sea μ: E → [0, 1] un conjunto borroso. Se verifica que $J^{Min}(R(a, b), J_\mu^{Min}(a, b)) = J^{Min}((Min)_R^{\mu}(a, b), \mu_2(a, b))$ para todo $(a, b)\in E_1\times E_2$.

Demostración:

$$J^{Min}(R(a, b), J_\mu^{Min}(a, b)) = \begin{cases} 1 & \text{si } R(a,b) \le J_\mu^{Min}(a,b) \\ J_\mu^{Min}(a,b) & \text{si } R(a,b) > J_\mu^{Min}(a,b) \end{cases}$$

$$J^{Min}((Min)_R^{\mu}(a, b), \mu 2(a, b)) = \begin{cases} 1 & \text{si } Min_R^\mu(a,b) \le \mu(b) \\ \mu(b) & \text{si } Min_R^\mu(a,b) > \mu(b) \end{cases}$$

Si (a, b) no pertenece a $INC_{Min}^{\mu}(R)$ entonces las condiciones (1) y (2) no se verifican, por lo que ambas expresiones son iguales a 1.

Si (a, b) pertenece a $INC_{Min}^{\mu}(R)$ entonces:

$$\begin{aligned} J^{Min}(R(a, b), J_\mu^{Min}(a, b)) &= J_\mu^{Min}(a, b) && \text{por (1)} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } \mu(a) \le \mu(b) \\ \mu(b) & \text{si } \mu(a) > \mu(b) \end{cases} && \text{por (3)} \\ &= \mu(b) && \text{por (2)} \\ &= J^{Min}((Min)_R^{\mu}(a, b), \mu(b)). \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 2.3.2

Sea R una relación borrosa y sea μ: E → [0, 1] una relación borrosa.

Se verifica que $J^{Prod}(R(a, b), J_\mu{}^{Prod}(a, b)) = J^{Prod}((Prod)_R{}^\mu(a, b), \mu_2(a, b))$ para todo (a, b) de $E_1 \times E_2$.

Demostración:

$$J^{Prod}(R(a,b), J_\mu{}^{Prod}(a,b)) = \begin{cases} 1 & \text{si } R(a,b) \le J_\mu^{Prod}(a,b) \\ \dfrac{J_\mu^{Prod}(a,b)}{R(a,b)} & \text{si } R(a,b) > J_\mu^{Prod}(a,b) \end{cases}$$

$$J^{Prod}((Prod)_R{}^\mu(a,b), \mu_2(a,b)) = \begin{cases} 1 & \text{si } Prod_R^\mu(a,b) \le \mu(b) \\ \dfrac{\mu(b)}{Prod_R^\mu(a,b)} & \text{si } Prod_R^\mu(a,b) > \mu(b) \end{cases}$$

Si (a, b) no pertenece a $INC_{Prod}{}^\mu(R)$ entonces las condiciones (1) y (2) no se verifican, y por lo tanto ambas expresiones toman el valor 1.

Si (a, b) pertenece a $INC_{Prod}{}^\mu(R)$ entonces:

$$J^{Prod}(R(a,b), J_\mu{}^{Prod}(a,b)) = \frac{J_\mu^{Prod}(a,b)}{R(a,b)} \qquad \text{por (1) y (3)}$$

$$= \frac{\mu(b)}{\mu(a)R(a,b)}$$

$$= \frac{\mu(b)}{(Prod)_R^\mu(a,b)} \qquad \text{por (2)}$$

$$= J^{Prod}((Prod)_R{}^\mu(a,b), \mu(b))$$

$$= J^{Prod}((Prod)_R{}^\mu(a,b), \mu_2(a,b)).\ \blacksquare$$

Lema 2.3.3

Sea W la t-norma de *Łukasiewicz*, sea μ: E $\rightarrow$ [0, 1] un conjunto borroso y sea R una relación borrosa. Se verifica que

$$J^W(R(a, b), J_\mu{}^W(a, b)) = J^W((W)_R{}^\mu(a, b), \mu_2(a, b)) \text{ para todo } (a, b) \in E_1 \times E_2.$$

Demostración:

Si (a, b) no pertenece a $INC_W{}^\mu(R)$ entonces las condiciones (1) y (2) no se verifican, por lo que ambas expresiones toman el valor 1.

Si (a, b) pertenece a $INC_W{}^\mu(R)$ entonces:

$J^W(R(a, b), J_\mu{}^W(a, b)) = \text{Min}(1, 1 - R(a, b) + J_\mu{}^W(a, b))$ por (1)

$= 1 - R(a, b) + \text{Min}(1, 1 - \mu(a) + \mu(b))$ por (3)

$= 1 - R(a, b) + 1 - \mu(a) + \mu(b)$

$= 1 - (\mu(a) + R(a, b) - 1) + \mu(b)$ (puesto que $\mu(a)+R(a,b)-1>\mu(b)\geq 0$)

$= 1 - \text{Máx}(0, \mu(a) + R(a, b) - 1) + \mu(b)$

$= 1 - W(\mu(a), R(a, b)) + \mu(b)$ por (2)

$= \text{Mín}(1, 1 - (W)_R{}^\mu(a, b) + \mu(b))$

$= J^W((W)_R{}^\mu(a, b), \mu(b))$

$= J^W((W)_R{}^\mu(a, b), \mu_2(a, b))$. ∎

Proposición 2.3.1

Sea R una relación borrosa, sea μ: E $\rightarrow$ [0, 1] un conjunto borroso, sea T una t-norma y sea φ: [0, 1] $\times$ [0, 1] $\rightarrow$ [0, 1] una función continua estrictamente creciente tal que $\varphi(0)=0$ y $\varphi(1)=1$. Se verifica que

$$(a, b) \in INC{T_\varphi}^{\mu}(R) \text{ si y sólo si } (a, b) \in INC_T^{\varphi\mu}(\varphi R).$$

Demostración:

$(a, b) \in INC{T_\varphi}^{\mu}(R)$ si y sólo si $T_\varphi(\mu(a), R(a, b)) > \mu(b)$

si y sólo si $\varphi^{-1}(T(\varphi(\mu(a)), \varphi(R(a, b)))) > \mu(b)$

si y sólo si $T(\varphi(\mu(a)), \varphi(R(a, b))) > \varphi(\mu(b))$

si y sólo si $T(\varphi\mu(a), \varphi R(a, b)) > \varphi\mu(b)$

si y sólo si $(a, b) \in INC_T^{\varphi\mu}(\varphi R)$. ∎

Lema 2.3.4

Sea $T\varphi$ una t-norma de la familia del producto o de la familia de *Łukasiewicz*, sea R una relación borrosa y sea μ: E $\rightarrow$ [0, 1] un conjunto borroso. Se verifica que

$$J^{T\varphi}(R(a, b), J_\mu{}^{T\varphi}(a, b)) = J^{T\varphi}((T\varphi)_R{}^{\mu}(a, b), \mu_2(a, b)) \text{ para todo } (a, b) \in E_1 \times E_2.$$

Demostración:

Sea T la t-norma producto o la t-norma de *Łukasiewicz*. Al aplicar los lemas 2.3.2 y 2.3.3 a la relación borrosa φR y al conjunto borroso $\varphi\mu$, se tiene que

$$J^T(\varphi R(a, b), J_{\varphi\,\mu}{}^T(a, b)) = J^T((T)_{\varphi R}{}^{\varphi\mu}(a, b), \varphi\mu_2(a, b)).$$

Veamos que esta condición es necesaria y suficiente para que

$$J^{T\varphi}(R(a, b), J_\mu{}^{T\varphi}(a, b)) = J^{T\varphi}((T_\varphi)R^\mu(a, b), \mu_2(a, b)),$$

con lo que el resultado quedará demostrado para todas las t-normas de la familia del producto y paqra todas las t-normas de la familia de *Łukasiewicz*.

$J^T(\varphi R(a, b), J_{\varphi\,\mu}{}^T(a, b)) = J^T((T)_{\varphi R}{}^{\varphi\mu}(a, b), \varphi\mu_2(a, b))$ si y sólo si

$J^T(\varphi R(a, b), J^T(\varphi\mu(a), \varphi\mu(b))) = J^T((T)_{\varphi R}{}^{\varphi\mu}(a, b), \varphi\mu_2(a, b))$ si y sólo si

$J^T(\varphi R(a, b), J^T(\varphi\mu(a), \varphi\mu(b))) = J^T(T(\varphi\mu(a), \varphi R(a, b)), \varphi\mu_2(a, b))$ si y sólo si

$J^T(\varphi R(a, b), \varphi\varphi^{-1}J^T(\varphi\mu(a), \varphi\mu(b))) = J^T(\varphi\varphi^{-1}T(\varphi\mu(a), \varphi R(a, b)), \varphi\mu_2(a, b))$ si y sólo si

$J^T(\varphi R(a, b), \varphi\, J^T{}_\varphi\, (\mu(a), \mu(b))) = J^T(\varphi T_\varphi(\mu(a), R(a, b)), \varphi\mu_2(a, b))$ si y sólo si

$J^T(\varphi R(a, b), \varphi\, J^T{}_\varphi\, (\mu(a), \mu(b))) = J^T(\varphi(T_\varphi)_R{}^\mu(a, b), \varphi\mu_2(a, b))$ si y sólo si

$\varphi^{-1}J^T(\varphi R(a, b), \varphi\, J^T{}_\varphi\, (\mu(a), \mu(b))) = \varphi^{-1}J^T(\varphi(T_\varphi)_R{}^\mu(a, b), \varphi\mu_2(a, b))$ si y sólo si

$J\varphi^T(R(a, b), J^T\varphi\, (\mu(a), \mu(b))) = J\varphi^T((T\varphi)_R{}^\mu(a, b), \mu_2(a, b))$ si y sólo si (por (a))

$J^{T\varphi}(R(a, b), J^{T\varphi}(\mu(a), \mu(b))) = J^{T\varphi}((T_\varphi)_R{}^\mu(a, b), \mu_2(a, b))$ si y sólo si

$J^{T\varphi}(R(a, b), J_\mu{}^{T\varphi}(a, b)) = J^{T\varphi}((T_\varphi)_R{}^\mu(a, b), \mu_2(a, b))$.

Para el paso (a) se debe demostrar que $J^T\varphi = J^{T\varphi}$

$$J^T{}_\varphi (x, y) = \varphi^{-1} J^T(\varphi(x), \varphi(y))$$

$$= \varphi^{-1}\mathrm{Sup}\{z: T(\varphi(x), z) \le \varphi(y)\}$$

$$= \varphi^{-1}\mathrm{Sup}\{\varphi(z): T(\varphi(x), \varphi(z)) \le \varphi(y)\}$$

$$= \mathrm{Sup}\{z: T(\varphi(x), \varphi(z)) \le \varphi(y)\}$$

$$= \mathrm{Sup}\{z: \varphi^{-1}T(\varphi(x), \varphi(z)) \le y\}$$

$$= \mathrm{Sup}\{z: T_\varphi(x, z) \le y\}$$

$$= J^{T\varphi}(x, y).\ \blacksquare$$

Proposición 2.3.2

Sea T una t-norma suma ordinal. Si $x, y \in [a_i, b_i]$ entonces $T(x, y) \in [a_i, b_i]$.

Demostración:

Como cualquier t-norma T es monótona, y como si T es una suma ordinal entonces $T(a_i, a_i) = a_i$ y $T(b_i, b_i) = b_i$, por lo que $a_i = T(a_i, a_i) \le T(x, y) \le T(b_i, b_i) = b_i$.

$\blacksquare$

Proposición 2.3.3

Sea T una suma ordinal definida por una familia de t-normas arquimedianas T_i, $\{T_i: i \in J\}$ y una familia de intervalos disjuntos $\{(a_i, b_i): i \in J\}$, es decir, sea

$$T(x, y) = \begin{cases} a_i+(b_i-a_i)T_i\left(\dfrac{x-a_i}{b_i-a_i}, \dfrac{y-a_i}{b_i-a_i}\right) & \text{si } (x,y) \in [a_i, b_i]^2 \\ \mathrm{Min}(x,y) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La operación residual de una suma ordinal T es la siguiente:

$$J^T(x, y) = \mathrm{Sup}\{z: T(x, z) \le y)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } x \le y \\ y & \text{si } x>y \text{ y } (x, y) \notin [a_i, b_i] \quad \text{para todo } i \in J \\ a_i + (b_i - a_i) J^{T_i}\left(\dfrac{x-a_i}{b_i-a_i}, \dfrac{y-a_i}{b_i-a_i}\right) & \text{si } x>y \text{ y } (x, y) \notin [a_i, b_i] \end{cases}$$

Demostración:

1) Si $x \le y$, entonces las operaciones residuadas toman el valor 1.

2) Si $x>y$ y $(x, y) \notin [a_i, b_i]^2$ entonces $J^T(x, y) = y$. Se demuestra por casos:

2.1) Si $x \notin [a_i, b_i]$, entonces $J^T(x, y) = \mathrm{Sup}\{z: T(x, z) \le y\}$

$$= \mathrm{Sup}\{z: \mathrm{Min}(x, z) \le y\} = y.$$

2.2) Si $x \in [a_i, b_i]$ y $y \notin [a_i, b_i]$, entonces $z = J^T(x, y)$ no pertenece a $[a_i, b_i]$. La demostración es por reducción al absurdo. Como $y<x$, entonces $y<a_i$ y si $z = J^T(x, y)$ estuviese en $[a_i, b_i]$, entonces, por el lema 2.3.1 se tiene que $T(x, z)$ también pertenecería al intervalo $[a_i, b_i]$, lo cual contradice que $T(x, z) \le y$. Luego como $z \notin [a_i, b_i]$ la t-norma T es el mínimo y $J^T(x, y) = \mathrm{Sup}\{z: T(x, z) \le y\} = \mathrm{Sup}\{z: \mathrm{Min}(x, z) \le y\} = y$.

3) Si $x>y$ y $(x, y) \in [a_i, b_i]^2$ entonces $J^T(x, y) \in [a_i, b_i]$. Por reducción al absurdo, si $z = J^T(x, y)$ no estuviese en el intervalo $[a_i, b_i]$ entonces $J^T(x, y) = \mathrm{Sup}\{z: T(x, z) \le y\} = \mathrm{Sup}\{z: \mathrm{Min}(x, z) \le y\} = y$, lo cual contradice que y pertenezca a $[a_i, b_i]$. Así pues, en este caso: $J^T(x, y) = \mathrm{Sup}\{z: T(x, z) \le y\} =$

$$= \operatorname{Sup}\{z: a_i+(b_i - a_i)T_i\left(\frac{x-a_i}{b_i-a_i}, \frac{z-a_i}{b_i-a_i}\right)\leq y\}$$

$$= \operatorname{Sup}\{z: T_i\left(\frac{x-a_i}{b_i-a_i}, \frac{z-a_i}{b_i-a_i}\right)\leq \frac{y-a_i}{b_i-a_i}\}$$

$$= \{z: \frac{z-a_i}{b_i-a_i} = J^{Ti}\left(\frac{x-a_i}{b_i-a_i}, \frac{y-a_i}{b_i-a_i}\right)\}$$

$$= a_i + (b_i - a_i)\, J^{Ti}\left(\frac{x-a_i}{b_i-a_i}, \frac{y-a_i}{b_i-a_i}\right). \blacksquare$$

Definición 2.3.5

Sea R una relación borrosa. Se dice que la relación borrosa $\mathbf{R_{Ii}}$ es la relación **restringida** de R al intervalo $I_i = [a_i, b_i]$, y se define por $R_{Ii}(a, b) = \frac{R(a, b)-a_i}{b_i-a_i}$.

Definición 2.3.6

Sea μ un conjunto borroso. Se dice que el conjunto borroso $\boldsymbol{\mu_{Ii}}$ es el conjunto **restringido** de μ al intervalo $[a_i, b_i]$, y se define por $\mu_{Ii}(a) = \frac{\mu(a)-a_i}{b_i-a_i}$.

Lema 2.3.5

Sea R una relación borrosa, sea μ un conjunto borroso y sea T una suma ordinal. Se verifica que

$$J^T(R(a, b), J_\mu{}^T(a, b)) = J^T(T_R{}^\mu(a, b), \mu_2(a, b)) \text{ para todo } (a, b) \in E_1\times E_2.$$

Demostración:

1) Si $R(a, b) \leq J\mu^T(a, b)$, es decir, si $(T)_R{}^{\mu}(a, b) \leq \mu_2(a, b)$, entonces

$J^T(R(a, b), J\mu^T(a, b)) = J^T(T_R{}^{\mu}(a, b), \mu_2(a, b)) = 1$.

Este primer punto incluye el caso en que $\mu(a) \leq \mu(b)$.

En los demás casos se supone que $R(a, b) > J\mu^T(a, b)$, por lo que $\mu(a) > \mu(b)$.

2) Si $\mu(b) \notin [a_i, b_i]$ entonces por la proposición 2.3.2, caso 2.2 se tiene que:

$$
\begin{aligned}
J^T(R(a, b), J\mu^T(a, b)) &= J^T(R(a, b), J^T(\mu(a), \mu(b)) \\
&= J^T(R(a, b), \mu(b)) \\
&= \mu(b) \\
&= J^T(T_R{}^{\mu}(a, b), \mu(b)) \\
&= J^T((T)_R{}^{\mu}(a, b), \mu_2(a, b)).
\end{aligned}
$$

3) Si $\mu(a), \mu(b) \in [a_i, b_i]$ y $R(a, b) \notin [a_i, b_i]$, entonces por la proposición 2.3.3 se verifica que $J^T(R(a, b), J\mu^T(a, b)) = J\mu^T(a, b)$

$$
\begin{aligned}
&= J^T(\mu(a), \mu(b)) \qquad\qquad (b) \\
&= J^T(\mathrm{Min}(\mu(a), R(a, b)), \mu(b)) \\
&= J^T(T(\mu(a), R(a, b)), \mu(b)) \\
&= J^T(T_R{}^{\mu}(a, b), \mu_2(a, b)).
\end{aligned}
$$

(b) $T(\mu(a), R(a, b)) > \mu(b)$, por lo que $R(a, b)) > \mu(b)$, pero como $R(a, b) \notin [a_i, b_i]$, se tiene que $a_i \leq \mu(b) < \mu(a) \leq b_i < R(a, b))$, y $Min(\mu(a), R(a, b)) = \mu(a)$.

4) Si $R(a, b)$, $\mu(b)$ pertenece al intervalo $[a_i, b_i]$ y $\mu(a) \notin [a_i, b_i]$, entonces

$$J^T(R(a, b), J_\mu{}^T(a, b)) = J^T(R(a, b), J^T(\mu(a), \mu(b))$$

$$= J^T(R(a, b), \mu(b)) \qquad \text{(c)}$$

$$= J^T(Min(\mu(a), R(a, b)), \mu(b))$$

$$= J^T(T(\mu(a), R(a, b)), \mu(b))$$

$$= J^T(T_R{}^\mu(a, b), \mu_2(a, b)).$$

(c) $T(\mu(a), R(a, b)) > \mu(b)$, por lo que $R(a, b)) > \mu(b)$ y

$a_i \leq \mu(b) < R(a, b) \leq b_i < \mu(a)$, así pues $Min(\mu(a), R(a, b)) = R(a, b)$.

5) Si $\mu(b) \in [a_i, b_i]$ y $\mu(a)$, $R(a, b)$ no pertenecen al intervalo $[a_i, b_i]$ entonces

$$J^T(R(a, b), J_\mu{}^T(a, b)) = J^T(R(a, b), J^T(\mu(a), \mu(b))$$

$$= \mu(b) \qquad \text{(d)}$$

$$= J^T(T(\mu(a), R(a, b)), \mu(b))$$

$$= J^T(T_R{}^\mu(a, b), \mu_2(a, b))$$

(d) Por la proposición 2.3.2, como $\mu(a)$, $R(a, b)$ no pertenecen a $[a_i, b_i]$, se verifica que $T(\mu(a), R(a, b))$ no pertenece a $[a_i, b_i]$.

6) Si $\mu(a)$, $\mu(b)$, $R(a, b) \in [a_i, b_i]$ entonces por la proposición 2.3.3, caso 3, se verifica que:

$$J^T(R(a, b), J_\mu{}^T(a, b)) = J^T\left(R(a, b), a_i+(b_i-a_i)\, J^{Ti}\left(\frac{\mu(a) - a_i}{b_i - a_i}, \frac{\mu(b) - a_i}{b_i - a_i}\right)\right)$$

$$= a_i+(b_i-a_i) J^{Ti}\left(\frac{R(a,\ b)-a_i}{b_i - a_i}, J^{Ti}\left(\frac{\mu(a)-a_i}{b_i - a_i}, \frac{\mu(b)-a_i}{b_i - a_i}\right)\right)$$

$$= a_i+(b_i-a_i)\, J^{Ti}\left(R_{Ii}(a,b), J^{Ti}_{\mu_{Ii}}(a,b)\right) \qquad \text{(e)}$$

$$= a_i+(b_i-a_i)\, J^{Ti}\left((T_i)^{\mu_{Ii}}_{R_{Ii}}(a, b), \mu_{Ii}(b)\right)$$

$$= a_i+(b_i-a_i) J^{Ti}\left(T_i\left(\frac{\mu(a) - a_i}{b_i - a_i}, \frac{R(a,b) - a_i}{b_i - a_i}\right), \frac{\mu(b)-a_i}{b_i - a_i}\right)$$

$$= J^T\left(a_i+(b_i-a_i) T_i\left(\frac{\mu(a) - a_i}{b_i - a_i}, \frac{R(a, b) - a_i}{b_i - a_i}\right), \mu(b)\right) \qquad \text{(f)}$$

$$= J^T(T(\mu(a), R(a, b)), \mu(b))$$

$$= J^T(T_R{}^\mu(a, b), \mu_2(a, b)).$$

(e) Las t-normas arquimedianas verifican que

$$J^T(R(a, b), J_\mu{}^T(a, b)) = J^T(T_R{}^\mu(a, b), \mu_2(a, b)),$$

por lo tanto, la relación borrosa R_{Ii} restringida de R al intervalo $[a_i, b_i]$ y el conjunto borroso μ_{Ii} restringido de μ al intervalo $[\mathbf{a_i}, \mathbf{b_i}]$ verifican que

$$J^{Ti}\left(R_{Ii}(a,b), J^{Ti}_{\mu_{Ii}}(a,b)\right) = J^{Ti}\left((T_i)^{\mu_{Ii}}_{R_{Ii}}(a, b), \mu_{Ii}(b)\right) \text{ para cualquier t-norma } T_i.$$

(f) Por la proposición 2.3.2 se verifica que:

$$T(\mu(a), R(a, b)) = a_i+(b_i-a_i)T_i\left(\frac{\mu(a)-a_i}{b_i-a_i}, \frac{R(a,b)-a_i}{b_i-a_i}\right) \in [a_i, b_i]. \blacksquare$$

2.4. MEDIDAS DE μ-T-INCONDICIONALIDAD DE RELACIONES BORROSAS.

La μ-T-incondicionalidad de relaciones borrosas se puede medir calculando las diferencias en cada punto entre la relación dada y la relación μ-T-condicionalizada o bien calculando la diferencia en cada punto entre la relación $T_R{}^{\mu}$ y la relación proyección μ_2. Mediante el teorema anterior se ha probado que si dichas diferencias puntuales se calculan mediante la T*-distancia generalizada $1\text{-}J^T$ entonces ambas formas de medir coinciden. En este apartado, aprovechando dicho resultado, se definen la medida M_T y M'_T de μ-T-incondicionalidad.

Proposición 2.4.1

Sea $\mathfrak{I}^* = ([0, 1], T^*, \leq, 0)$ un semigrupo conmutativo ordenado con elemento neutro 0. Sea Ω el conjunto de relaciones borrosas R: $E_1 \times E_2 \rightarrow [0, 1]$.

La función d_T: $\Omega \times \Omega \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$\mathbf{d_T(R, R') = \underset{(a,b)\in E_1\times E_2}{\mathrm{Sup}} \{1 - J^T(R(a, b), R'(a, b))\}}$$

es una T*-distancia generalizada en el espacio métrico $(\Omega, \mathfrak{I}^*, d)$. (Ver apéndice)

Demostración:

Por ser $1\text{-}J^T$ una T*-distancia generalizada en [0,1] se tiene que

(I) $1\text{-} J^T(x, x)=0$.

(II) $T^*(1\text{-}J^T(x, y)\, ,\, 1\text{-}J^T(y, z)\,) \geq 1\text{-}J^T(x, z)$.

$d_T(R, R')$ es una T*-distancia generalizada, pues:

$$1)\ d_T(R, R) = \operatorname*{Sup}_{(a,b)\in E_1\times E_2} \{1\text{-}J^T(R(a, b), R(a, b))\} \qquad \text{(I)}$$

$$= \operatorname*{Sup}_{(a,b)\in E_1\times E_2} \{0, .. , 0\} = 0$$

$$2)\ T^*(\, d_T(R_1, R_2), d_T(R_2, R_3))$$

$$= T^*(\operatorname*{Sup}_{(a,b)\in E_1\times E_2} \{1\text{-}J^T(R_1(a,b), R_2(a,b))\}, \operatorname*{Sup}_{(a,b)\in E_1\times E_2} \{1\text{-}J^T(R_2(a,b), R_3(a,b))\}\,)$$

$$\geq \operatorname*{Sup}_{(a,b)\in E_1\times E_2} \{\, T^*(1\text{-}J^T(R_1(a,b), R_2(a,b))\, , 1\text{-}J^T(R_2(a,b), R_3(a,b))\,)\} \qquad \text{(II)}$$

$$\geq \operatorname*{Sup}_{(a,b)\in E_1\times E_2} \{1\text{-}J^T(R_1(a, b), R_3(a, b))\}$$

$$= d_T(R_1, R_3). \blacksquare$$

Definición 2.4.1

Dada una t-norma continua T, se define la medida borrosa de μ-T-incondicionalidad de relaciones borrosas M_T como

$$\mathbf{M_T(R) = d_T(R, J_\mu{}^T) = \operatorname*{Sup}_{(a,b)\in E_1\times E_2} \{1 - J^T(R(a, b), J_\mu{}^T(a, b))\}}$$

Proposición 2.4.2

Si μ es un conjunto borroso normal y que alcanza el valor cero (o si se verifica que el supremo de μ es igual a 1 y el ínfimo de μ es igual a 0) entonces

M_T es una medida borrosa monótona respecto de la inclusión [Nguyen-Walker; 1996].

Demostración:

1. Si $R=\varnothing$ entonces $M_T(\varnothing) = 0$, pues como $\varnothing(a, b) = 0$ para todo (a, b) de $E_1 \times E_2$ entonces $T\{\varnothing(a, b), z\} = T\{0, z\} = 0 \le J_\mu^T(a, b)$ para todo z, luego $J^T(\varnothing(a, b), J_\mu^T(a, b)) = \operatorname{Sup}_{(a,b)\in E_1\times E_2} \{z: T\{\varnothing(a, b), z\} \le J_\mu^T(a, b)\} = 1$, y por tanto $M_T(\varnothing) = d_T(\varnothing, J_\mu^T) = \operatorname{Sup}_{(a,b)\in E_1\times E_2} \{1-J^T(\varnothing(a, b), J_\mu^T(a, b))\} = 1-1 = 0$.

2. Veamos cuál es el máximo valor alcanzado: Si $R(a, b) = 1$ para todo (a, b) de $E_1 \times E_2$ entonces $T\{R(a, b), z\} = T\{1, z\} = z \le J_\mu^T(a, b)$, luego $J^T(R(a, b), J_\mu^T(a, b)) = J^T(1, J_\mu^T(a, b)) = J_\mu^T(a, b)$, y por tanto $M_T(R) = d_T(R, J_\mu^T) = \operatorname{Sup}_{(a,b)\in E_1\times E_2} \{1-J^T(R(a, b), J_\mu^T(a, b))\} = \operatorname{Sup}_{(a,b)\in E_1\times E_2} \{1- J_\mu^T(a, b)\}$

   Si μ alcanza los valores 0 y 1 entonces $J^T(1, 0) = 0$, luego entonces $\operatorname{Sup}_{(a,b)\in E_1\times E_2} \{1- J_\mu^T(a, b)\} = 1$. Si μ verifica que el supremo de μ es igual a 1 y el ínfimo de μ es igual a 0 entonces $\operatorname{Sup}_{(a,b)\in E_1\times E_2} \{1- J_\mu^T(a, b)\} = 1$. Si μ no fuese normal y no alcanzase el valor 0, se podría normalizar denominando $A = \operatorname{Sup}_{(a,b)\in E_1\times E_2} \{1- J_\mu^T(a, b)\}$ y definiendo $M_T(R) = d_T(R, J_\mu^T) / A$.

3. Si $R \subseteq R'$ entonces $R(a, b) \leq R'(a, b)$ para todo $(a, b) \in E_1 \times E_2$, entonces $T\{R(a, b), z\} \leq T\{R'(a, b), z\}$, luego $\sup_{(a,b)\in E_1\times E_2} \{z: T\{R(a, b), z\} \leq J_\mu^T(a, b)\}$ es mayor o igual al $\sup_{(a,b)\in E_1\times E_2} \{z: T\{R'(a, b), z\} \leq J_\mu^T(a, b)\}$, por lo que:

$$M_T(R) = d_T(R, J_\mu^T) = \sup_{(a,b)\in E_1\times E_2} \{1-J^T(R(a, b), J_\mu^T(a, b))\}$$

$$\leq \sup_{(a,b)\in E_1\times E_2} \{1-J^T(R'(a, b), J_\mu^T(a, b))\} = d_T(R', J_\mu^T) = M_T(R')$$

Luego M_T es una medida borrosa monótona respecto de la inclusión según *Nguyen-Walker* [Nguyen-Walker; 1996]. ∎

Corolario 2.4.1

La medida borrosa de μ-T-incondicionalidad de relaciones borrosas M_T se puede calcular como

$$M_T(R) = d_T((T)_R^\mu, \mu_2) = \sup_{(a,b)\in E_1\times E_2} \{1- J^T((T)_R^\mu(a, b), \mu_2(a, b))\}.$$

La demostración es trivial a partir de la definición 2.4.1 y el teorema 2.3.1. ∎

Ejemplo de medida borrosa de μ-T-incondicionalidad M_T de relaciones borrosas discretas.

Sea μ un conjunto borroso sobre $E = \{a, b, c\}$ con los siguientes valores de pertenencia:

$$\mu = \{0.2/a, 0.5/b, 0.8/c\}.$$

Sea R: E×E → [0, 1] la relación borrosa definida por la siguiente matriz:

$$R_{E\times E} = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 1 & 0.1 & 0.9 \\ b & 0.6 & 1 & 0.4 \\ c & 0.3 & 0.7 & 1 \end{array}$$

Caso 1: t-norma mínimo

Tomando como T la t-norma mínimo, el operador residual J_μ^{Min} viene representado por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.2 & 1 & 1 \\ 0.2 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

La medida borrosa de μ-Min-incondicionalidad de relaciones borrosas M_{Min} se calcula como

$$M_{Min}(R) = d_{Min}(R, J_\mu^{Min}) = \sup_{(a,b)\in E_1\times E_2} \{1\text{-}J^{Min}(R(a, b), J_\mu^{Min}(a, b))\}$$

$$= \text{Sup}\ \{1\text{-}J^{Min}(0.6, 0.2), 1\text{-}J^{Min}(0.3, 0.2), 1\text{-}J^{Min}(0.7, 0.5)\}$$

$$= 1\text{-}J^{Min}(0.6, 0.2)$$

$$= 0.8$$

por lo tanto R no es una relación μ-Min-condicionalidad.

Caso 2: t-norma producto

Tomando como T la t-norma mínimo, el operador residual J_μ^{Prod} viene representado por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.4 & 1 & 1 \\ 0.25 & 0.625 & 1 \end{pmatrix}.$$

La medida borrosa de μ-Prod-incondicionalidad de relaciones borrosas M_{Prod} se calcula como

$$MProd(R) = d_{Prod}(R, J_\mu^{Prod}) = \sup_{(a,b)\in E_1\times E_2} \{1\text{-}J^{Prod} (R(a, b), J_\mu^{Prod} (a, b))\}$$

$$= \text{Sup } \{1\text{-}J^{Prod}(0.6, 0.4), 1\text{-}J^{Prod}(0.3, 0.25), 1\text{-}J^{Prod}(0.7, 0.625)\}$$

$$= 1\text{-}J^{\ Prod} (0.6, 0.4)\}$$

$$= 0.333$$

por lo tanto R no es una relación μ-Prod-condicional.

Caso 3: t-norma de Łukasiewicz

Tomando como T la t-norma de *Łukasiewicz*, el operador residual J_μ^{W} viene representado por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.7 & 1 & 1 \\ 0.4 & 0.7 & 1 \end{pmatrix},$$

que es mayor que la relación R, por lo que la medida borrosa de μ-W-incondicionalidad de relaciones borrosas M_{Prod} se calcula como

$$M_W(R) = d_{Prod}(R, J_\mu^W) = \sup_{(a,b)\in E_1\times E_2} \{1-J^W (R(a, b), J_\mu^W (a, b))\}$$

$$= \text{Sup} \{1\text{-}1, .., 1\text{-}1\} = 0$$

lo cual indica que R es μ-W-condicional, lo que es de esperar, pues es una relación contenida en la mayor relación μ-W-incondicional J_μ^W.

Definición 2.4.2:

$$\mathbf{M'_T(R) = \iint_{(a,b)\in E_1\times E_2} (1 - J^T(R(a, b), J_\mu^T(a, b))).da.db}$$

Comentario

La medida borrosa de μ-T-incondicionalidad de relaciones borrosas M_T se basa en el supremo, por lo que toda la medida se basa en la μ-T-incondicionalidad en un solo punto (a, b). Esta medida borrosa M'_T basa la medida en distancias $1\text{-}J^T$ en todos los puntos en que la relación no es μ-T-condicional, permitiendo, en el caso de que la relación sea una superficie, introducir una medida de μ-T-incondicionalidad como un volumen.

Proposición 2.4.3:

M'_T es una medida borrosa monótona respecto de la inclusión [Nguyen-Walker; 1996]. Y si la medida de $E_1\times E_2$ es uno entonces $M'_T \leq 1$.

Demostración:

1) Si R=∅ entonces $M'_T(\emptyset) = 0$, pues como $\emptyset(a, b) = 0$ para todo (a, b) de $E_1\times E_2$ entonces $T\{\emptyset(a, b), z\} = T\{0, z\} = 0 \leq J_\mu^T(a, b)$ para todo z, luego

$J^T(\varnothing\,(a, b), J\mu^T(a, b)) = \operatorname{Sup}_{(a,b)\in E_1\times E_2} \{z: T\{\varnothing(a, b), z\} \leq J\mu^T(a, b)\} = 1$, y por tanto $M'_T(\varnothing) = \iint_{(a,b)\in E_1\times E_2} (1\text{-}1) = 0.$

2) Si $R \subseteq R'$ entonces $R(a, b) \leq R'(a, b)$ para todo $(a, b) \in E_1\times E_2$ entonces $T\{R(a, b), z\} \leq T\{R'(a, b), z\}$, luego $\operatorname{Sup}_{(a,b)\in E_1\times E_2} \{z: T\{R(a, b), z\} \leq J\mu^T(a, b)\}$ es mayor o igual al $\operatorname{Sup}_{(a,b)\in E_1\times E_2} \{z: T\{R'(a, b), z\} \leq J\mu^T(a, b)\}$, por lo que:

$$M'_T(R) = \iint_{(a,b)\in E_1\times E_2} (1\text{-}J^T(R(a, b), J\mu^T(a, b)))$$

$$\leq \iint_{(a,b)\in E_1\times E_2} (1\text{-}J^T(R'(a, b), J\mu^T(a, b))) = M_T(R')$$

El máximo valor depende de la medida de $E_1\times E_2$

Luego M'_T es una medida borrosa según *Nguyen-Walker* [Nguyen-Walker; 1996]. ∎

Corolario 2.4.2:

La medida borrosa de μ-T-incondicionalidad de relaciones borrosas M'_T se puede calcular como

$$M'_T(R) = \iint_{(a,b)\in E_1\times E_2} (1\text{-}\ J^T((T)_R{}^{\mu}(a, b), \mu_2(a, b))).da.db$$

La demostración es trivial a partir de la definición 2.4.2 y el teorema 2.3.1. ∎

Definición 2.4.3

Para toda t-norma continua T, el **k-q-momento de μ-T-incondicionalidad** de una relación borrosa R se define como

$$\iint_{(a,b)\in E_1\times E_2} \mathbf{a^k.b^q.(1\text{-}J^T(R(a,\ b),\ J\mu^T(a,\ b)))\ da.db.}$$

Esta definición generaliza la medida borrosa M'_T.

Corolario 2.4.3

Para toda t-norma continua T, el k-q-momento de μ-T-incondicionalidad de una relación borrosa R se puede calcular mediante la expresión

$$\iint_{(a,b)\in E_1\times E_2} \mathbf{a^k.b^q.\ (1\text{-}\ J^T((T)R^{\mu}(a,\ b),\ \mu 2(a,\ b)))\ da.db.}$$

La demostración es trivial a partir de la definición 2.4.2 y el teorema 2.3.1. ∎

2.5. EJEMPLOS DE MEDIDAS M'_T DE μ-T-INCONDICIONALIDAD DE OPERADORES

Los operadores son relaciones borrosas sobre el universo $E_1 \times E_2=[0,1] \times [0,1]$. Los siguientes ejemplos muestran el cálculo de algunas medidas M'_T de incondicionalidad de los principales operadores de implicación. En todos ellos se toma como conjunto borroso μ el conjunto borroso identidad sobre el universo [0, 1], es decir, una función $\mu:[0, 1]\rightarrow[0, 1]$ tal que $\mu(x)=x$.

Se ofrece una tabla con las medidas M'_T de μ-T-incondicionalidad de conocidos operadores de implicación residuales, S-implicaciones, QM-implicaciones, conjunciones y el mayor operador para las t-normas mínimo, producto y *Łukasiewicz*:

Operador	T = Mínimo	T = Producto	T= Łukasiewicz
Gödel(x, y) = J^{Min}(x, y) = $\begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ y & \text{si } x > y \end{cases}$	0	0	0
Goguen(x, y) =J^{Prod} = $\begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ y/x & \text{si } x > y \end{cases}$	$\frac{1}{3}$	0	0
Kleene-Dienes(x, y) = Max(1-x, y)	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{30}$	0
EarlyZadeh(x, y) = Max(x, Min(x, y))	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{30}$	0
Reichenbach(x, y) = 1-x+xy	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2} - 2ln2 \cong$ 0.1137	0
Mamdani(x, y)= Min(x, y)	0	0	0
Producto (x, y) = xy	$\frac{1}{3}$	0	0
Operador Constante 1 (siempre toma valor 1 -el más μ-T-incondicional posible-)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

Tabla 1: Medidas M'_T de Id-T-incondicionalidad de operadores

Se han calculado también las mayores medidas M'_T de Id-T-incondicionalidad para las t-normas mínimo, producto y Łukasiewicz utilizando para ello el operador constante 1 que es el más Id-T-incondicionalidad posible. Los cálculos de las medidas M'_T de Id-T-incondicionalidad de algunos de estos operadores se ofrecen a continuación. En ellos se observa gráficamente las regiones de Id-T-incondicionalidad que son las coloreadas.

Observación:

El cálculo de las medidas M'_T de Id-Min-incondicionalidad depende exclusivamente de la región de Id-Min-incondicionalidad de los operadores, pues la distancia $1\text{-}J^{Min}$ que se utiliza siempre toma el valor 1-y en los puntos en que el operador no es Id-Min-incondicional. Para el resto de t-normas las medidas M'_T de Id-Min-incondicionalidad no dependen exclusivamente de la región de Id-T-incondicionalidad.

Ejemplo 2.5.1: Implicación de Gödel

El operador de implicación de Gödel se define como Gödel(x, y) = $\begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ y & \text{si } x > y \end{cases}$, es decir, la función de implicación de Gödel es el operador residual de la t-norma mínimo, denotado por J^{Min}.

Se representan gráficamente sus valores sobre $E_1 \times E_2 = [0, 1] \times [0, 1]$ y como una superficie en las figuras siguientes:

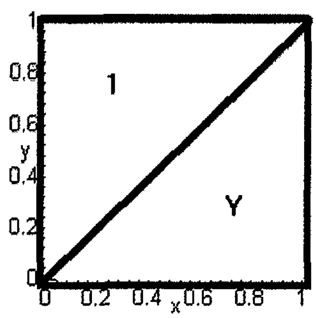
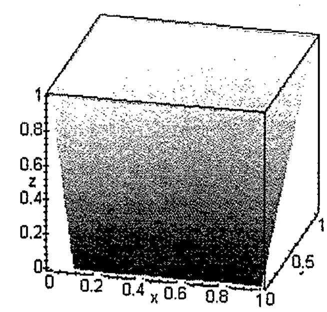
	

Fig. 2.5.1.1: Operador de implicación de Gödel	Fig. 2.5.1.2: Operador de implicación de Gödel visto como una superficie.

Por ser la función de implicación de Gödel el operador residual de la t-norma mínimo resulta que es una relación μ-Min-condicional, por lo que es μ-T-condicional para toda t-norma T y por tanto todas sus medidas M_T y M'_T de μ-T-incondicionalidad toman el valor cero.

Ejemplo 2.5.2: Implicación de Goguen

El operador de implicación de Goguen se define como

$$\text{Goguen}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ y/x & \text{si } x > y \end{cases},$$

es decir, la función de implicación de Goguen es el operador residual de la t-norma producto, denotado por J^{Prod}.

Se representan gráficamente sus valores sobre $E_1 \times E_2 = [0, 1] \times [0, 1]$ y se representa también como una superficie en las figuras siguientes:

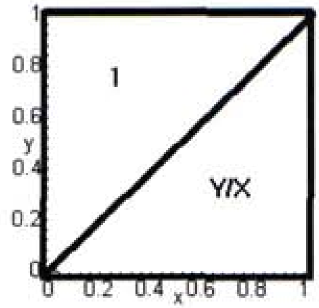


Fig. 2.5.2.1: Operador de implicación de Goguen

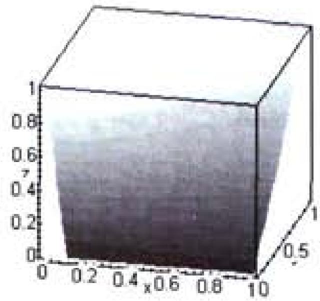


Fig. 2.5.2.2: Operador de implicación de Goguen visto como una superficie.

Por ser la función de implicación de Goguen el operador residual de la t-norma producto, es una relación μ-Prod-condicional, por lo que también es μ-W-condicional y todas sus medidas M_T y M'_T de μ-Prod-incondicionalidad y de μ-W-incondicionalidad toman el valor cero.

Para estudiar la μ-Min-incondicionalidad de la implicación de Goguen, se utiliza el método de calcular la distancia $1\text{-}J^{Min}$ entre Min(μ(x), Goguen(x, y)) y μ(y), es decir, la distancia entre Min(x, Goguen(x, y)) e y.

La expresión Min(x, Goguen(x, y)) se expresa gráficamente como sigue:

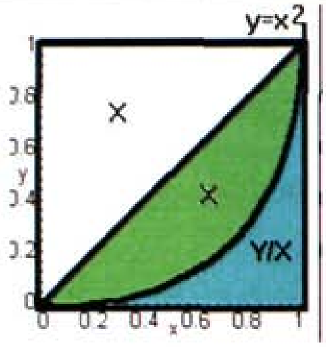


Fig. 2.5.2.3: Expresión Min(x, Goguen(x, y))

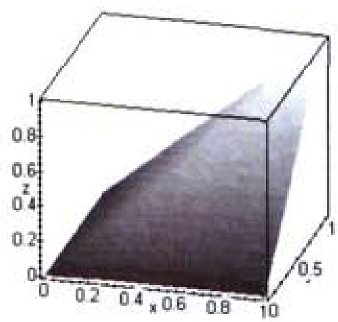


Fig. 2.5.2.4: Superficie de la expresión Min(x, Goguen(x, y)).

La medida M'_{Min} de μ-Min-incondicionalidad de la implicación de Goguen se calcula utilizando el corolario 2.4.3 como

$$\iint_{(x,\,y)\in E_1\times E_2} (1 - J^{Min}(\mathrm{Min}(x, \mathrm{Goguen}(x, y)), y))\, dxdy$$

$$= \iint_{0\le x\le y\le 1} (1 - J^{Min}(x, y))dxdy + \iint_{0\le x^2\le y<x\le 1} (1 - J^{Min}(x, y))\, dxdy +$$

$$+ \iint_{0\le y<x^2\le 1} (1 - J^{Min}(\frac{y}{x}, y))\, dxdy$$

$$= \iint_{0\le x\le y\le 1} (1 - 1)\, dxdy + \iint_{0\le x^2\le y<x\le 1} (1 - y)\, dxdy + \iint_{0\le y<x^2\le 1} (1 - y)\, dxdy$$

$$= \int_0^1\int_0^x (1-y)\, dydx = \frac{1}{3}.$$

Se comprueba que al calcular medida M'_{Min} de μ-Min-incondicionalidad de la implicación de Goguen por la fórmula de la definición 2.4.2 el otro método se tiene el mismo resultado:

$$\iint_{(x,\,y)\in E_1\times E_2} (1 - J^{Min}(\mathrm{Goguen}(x, y), J^{Min}(x, y)\, dxdy$$

$$= \iint_{0\le x\le y\le 1} (1 - 1)dydx + \iint_{0\le y<x\le 1} (1 - J^{Min}(\frac{y}{x}, y))dydx$$

$$= \int_0^1\int_0^x (1-y)\, dydx = \frac{1}{3}.$$

Ejemplo 2.5.3: Implicación de Kleene-Dienes.

El operador de implicación de Kleene-Dienes se define como:

$$\textbf{Kleene-Dienes}(x, y) = \textbf{Max}(1-x, y)$$

En las figuras siguientes se representan gráficamente sus valores sobre $E_1 \times E_2 = [0, 1] \times [0, 1]$ y como una superficie en el espacio de dimensión tres:

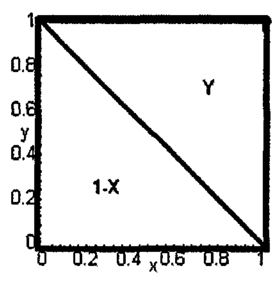


Fig. 2.5.3.1: Operador de implicación de Kleene-Dienes

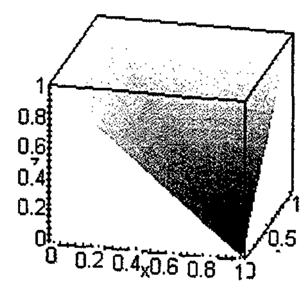


Fig. 2.5.3.2: Operador de implicación de Kleene-Dienes visto como una superficie.

Para estudiar la μ-Min-incondicionalidad de la implicación de Kleene-Dienes, se utiliza el método de calcular la distancia $1\text{-}J^{Min}$ entre Min(μ(x), Kleene-Dienes(x, y)) y μ(y).

La expresión Min(x, Kleene-Dienes(x, y)) se expresa gráficamente como sigue:

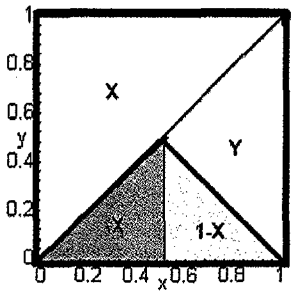
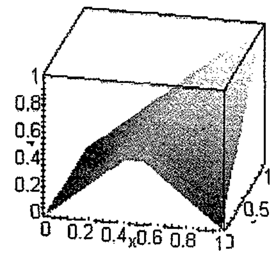
	

Fig. 2.5.3.3: Expresión Min(x, Kleene-Dienes(x, y))	Fig. 2.5.3.4: Superficie de la expresión Min(x, Kleene-Dienes(x, y)).

La medida M'_{Min} de μ-Min-incondicionalidad de la implicación de Kleene-Dienes se calcula como

$$\iint_{(a,b)\in E_1\times E_2} (1-J^{Min}(\mathrm{Min}(x, \text{Kleene-Dienes}(x, y)), y)\,dxdy$$

$$= \iint_{0\le x\le y\le 1} (1-J^{Min}(x, y))dxdy + \iint_{0\le y\le x\le \frac{1}{2}} (1-J^{Min}(x, y))\,dxdy +$$

$$+ \iint_{0\le y<\frac{1}{2}\le x\le 1} (1-J^{Min}(1-x, y))\,dxdy$$

$$= \iint_{0\le x\le y\le 1} (1-1)\,dxdy + \iint_{0\le y\le x\le \frac{1}{2}} (1-y)\,dxdy + \iint_{0\le y<\frac{1}{2}\le x\le 1} (1-y)\,dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}}\int_y^{1-y} (1-y)\,dxdy = \frac{5}{24}.$$

Para estudiar la μ-Prod-incondicionalidad de la implicación de Kleene-Dienes, se utiliza el método de calcular la distancia $1\text{-}J^{Prod}$ entre Prod(μ(x), Kleene-Dienes(x, y)) y μ(y)=y.

La expresión Prod(x, Kleene-Dienes (x, y)) se expresa gráficamente como sigue:

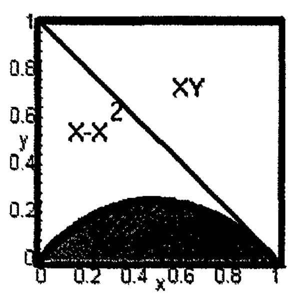


Fig. 2.5.3.5: Expresión

Prod(x, Kleene-Dienes (x, y))

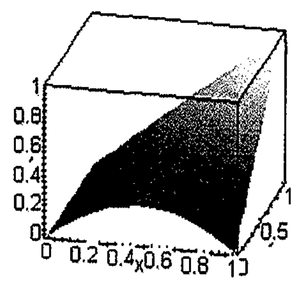


Fig. 2.5.3.6: Superficie de la expresión

Prod(x, Kleene-Dienes (x, y)).

La medida M'_{Prod} de μ-Prod-incondicionalidad de la implicación de Kleene-Dienes se calcula como

$$\iint_{(a,b)\in E_1\times E_2} (1\text{-}\ J^{Prod}\ (\mathrm{Prod}(x, \text{Kleene-Dienes}(x, y)), y)\ dxdy$$

$$= \iint_{0\le y\le x-x^2\le 1} (1\text{-}\ J^{Prod}(x\ \mathrm{Max}(1\text{-}x, y), y))dxdy$$

$$= \iint_{0\le x-x^2\le y\le 1} (1\text{-}\ 1)\ dxdy + \iint_{0\le y\le x-x^2\le 1} (1\text{-}\ \frac{y}{x-x^2})\ dxdy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{x-x^2} (1-\frac{y}{x-x^2})\ \mathrm{dydx} = \frac{1}{30}.$$

Ejemplo 2.5.4: Implicación de Reichenbach.

El operador de implicación de Reichenbach se define como

Reichenbach(x, y) = Max(1-x + xy)

En las figuras siguientes se representan gráficamente sus valores sobre $E_1 \times E_2 = [0, 1] \times [0, 1]$ y como una superficie en el espacio de dimensión tres:

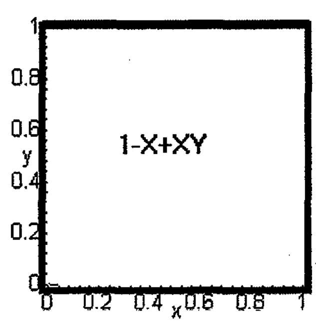
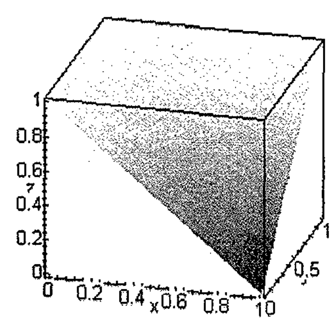
	

Fig. 2.5.4.1: Operador de implicación de Reichenbach	Fig. 2.5.4.2: Operador de implicación de Reichenbach visto como una superficie.

Para estudiar la μ-Min-incondicionalidad de la implicación de Reichenbach, se utiliza el método de calcular la distancia $1\text{-}J^{Min}$ entre Min(μ(x), Reichenbach (x, y)) y μ(y)=y.

La expresión Min(x, Reichenbach (x, y)) se expresa gráficamente como sigue:

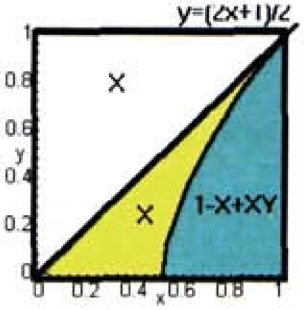


Fig. 2.5.4.3: Expresión Min(x, Reichenbach (x, y))

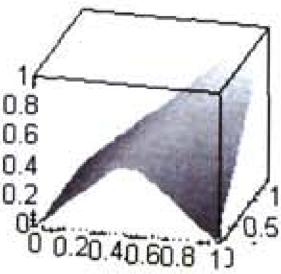


Fig. 2.5.4.4: Superficie de la expresión Min(x, Reichenbach (x, y)).

La medida M'_{Min} de μ-Min-incondicionalidad de la implicación de Reichenbach se calcula como

$$\iint_{(a,b)\in E_1\times E_2} (1- J^{Min} (Min(x, Reichenbach (x, y)), y) \, dxdy$$

$$= \iint_{0\le x\le y\le 1} (1- J^{Min}(x, y))dxdy + \iint_{0\le \frac{2x+1}{2}\le y<x\le 1} (1- J^{Min} (x, y)) \, dxdy +$$

$$+ \iint_{0\le y<\frac{2x+1}{2}\le 1} (1- J^{Min} (x-y+xy, y)) \, dxdy$$

$$= \iint_{0\le x\le y\le 1} (1- y) \, dxdy + \iint_{0\le \frac{2x+1}{2}\le y<x\le 1} (1- y) \, dxdy + \iint_{0\le y<x^2\le 1} (1- y) \, dxdy$$

$$= \int_0^1\int_0^x (1-y) \, dydx = \frac{1}{3}.$$

Para estudiar la μ-Prod-incondicionalidad de la implicación de Reichenbach, se utiliza el método de calcular la distancia 1-J^{Prod} entre Prod(μ(x), Reichenbach (x, y)) y μ(y)=y.

La expresión Prod(x, Reichenbach (x, y)) se expresa gráficamente como sigue:

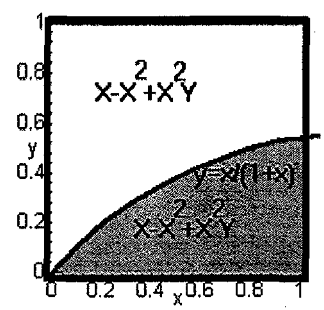
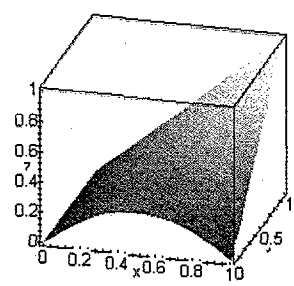
	

Fig. 2.5.4.5: Expresión Prod(x, Reichenbach (x, y))=x-x^2+x^2y	Fig. 2.5.4.6: Superficie de la expresión Prod(x, Reichenbach (x, y)).

La medida M'_{Prod} de μ-Prod-incondicionalidad de la implicación de Reichenbach se calcula como

$$M'_{Prod} = \iint_{(a,b)\in E_1\times E_2} (1- J^{Prod} (Prod(x, Reichenbach(x, y)), y)\, dxdy$$

$$= \iint_{0\le \frac{x}{1+x} \le y \le 1} (1- J^{Prod}(x-x^2+x^2y, y))dxdy + \iint_{0\le y< \frac{x}{1+x} \le 1} (1- J^{Prod}(x-x^2+x^2y, y))dxdy$$

$$= \iint_{0\le \frac{x}{1+x} \le y \le 1} (1- 1)\, dxdy + \iint_{0\le y< \frac{x}{1+x} \le 1} (1- \frac{y}{x-x^2+x^2y})\, dxdy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{x}{1+x}} (1- \frac{y}{x - x^2 + x^2 y}) \text{ dydx} .$$

Se llega a el mismo resultado calculando la medida M'$_{\text{Prod}}$ de μ-Prod-incondicionalidad de la implicación de Reichenbach por el método de calcular la distancia generalizada 1- J^{Prod} entre el operador de Reichenbach y el operador J^{Prod}:

$$\iint_{(x,\, y) \in E_1 \times E_2} (1- J^{\text{Prod}} (\text{Reichenbach } (x, y), J^{\text{Prod}}(x, y) \text{ dxdy}$$

$$= \iint_{0 \leq \frac{x}{1+x} \leq y \leq 1} (1- 1) \text{ dxdy} + \iint_{0 \leq y < \frac{x}{1+x} \leq 1} (1- J^{\text{Prod}} (1\text{-x+xy}, \frac{y}{x}) \text{ dxdy}$$

$$= \iint_{0 \leq y < \frac{x}{1+x} \leq 1} (1- \frac{\frac{y}{x}}{1 - x + xy}) \text{ dxdy} = \int_0^1 \int_0^{\frac{x}{1-x}} (1- \frac{y}{x - x^2 + x^2 y}) \text{ dydx}.$$

2.6. CONCLUSIÓN

Cuando se realizan inferencias borrosas es interesante proporcionar una medida del grado de μ-T-condicionalidad de una relación borrosa, pues esto nos permite comprobar el grado en que dicha relación verifica la propiedad del *modus ponens* generalizado.

Los espacios métricos generalizados y su relación con los preórdenes pueden resultar útiles para definir medidas borrosas. La medida de μ-T-incondicionalidad está relacionada con la inclusión borrosa, que define un preorden entre las relaciones borrosas y proporciona un grado de verificación del *modus ponens* generalizado. Por lo tanto, la medida que se utiliza es una medida borrosa que verifica que la medida del conjunto vacío es cero y que si dos relaciones están relacionadas por la inclusión entonces sus medidas están relacionadas.

En este capítulo se presentan dos métodos originales para medir la μ-T-incondicionalidad de relaciones borrosas. Una medida borrosa de μ-T-incondicionalidad se define calculando una distancia generalizada entre la relación borrosa R y la mayor relación μ-T-condicional contenida en ella, es decir entre la relación y su relación μ-T-condicionalizada. Sin embargo otra forma coherente de calcular la medida borrosa es calcular la distancia generalizada entre $T(\mu(a), R(a, b))$ y $\mu(b)$ en todos los puntos (a, b) de $E_1 \times E_2$ en los cuales R no verifica la propiedad puntual de μ-T-condicionalidad.

Se incluye una demostración propia de que, para toda t-norma continua, si se utiliza la distancia generalizada $1\text{-}J^T$ definida a partir de la operación residuada de la t-norma, entonces ambas formas de medir la μ-T-incondicionalidad resultan ser iguales. El resultado es puntual, es decir, esta igualdad se verifica en cada punto del universo, pues se demuestra, para todas las t-normas continuas, que $J^T(R(a, b), J_\mu{}^T(a, b))$ es igual a $J^T(T_R{}^\mu(a, b), \mu_2(a, b))$ en todo punto (a, b) del universo $E_1 \times E_2$.

CAPÍTULO 3:

MEDIDAS DE ESPECIFICIDAD Y $\prec$-MEDIDAS BORROSAS DE ESPECIFICIDAD

3.1. INTRODUCCIÓN

Se pretende que una medida borrosa de especificidad, de adecuación o de idoneidad evalúe el grado en que un subconjunto borroso tiende a tener un elemento y sólo uno. Si "*x es A*" es una proposición, entonces la especificidad de A debe entenderse como la cantidad de información idónea que contiene dicha proposición. Juega, por tanto, un papel importante en la ingeniería de la información al proporcionar una medida de la cantidad de información contenida en un subconjunto borroso.

En la bibliografía aparecen conceptos relacionados:

- El concepto de medida de especificidad introducido por *Yager* [R. R. Yager; 1982]
- *Dubois* y *Prade* [D. Dubois, H. Prade; 1987] han investigado sobre las propiedades y aplicaciones de la medida de especificidad. Introducen el concepto de **especificidad mínima**, y muestran el papel central de la especificidad en la teoría del **razonamiento aproximado**.
- *Higashi* y *Klir* [M. Higashi, G. J. Klir; 1983] discuten un concepto similar que denominan **no-especificidad**.

- Está también muy relacionado con el concepto de **granularidad** introducido por *Zadeh* [L. A. Zadeh; 1971].
- La medida de especificidad según Yager está fuertemente relacionada con el inverso de la cardinalidad de un conjunto.

Las medidas de especificidad tienen muchas aplicaciones:

- *Kacprzyk* [J. Kacprzyk; 1990] analiza como utilizarlas para el **aprendizaje inductivo**.
- *Yager* [R. R. Yager; 1991] ha mostrado algunas aplicaciones en la toma de decisiones como una medida de **tranquilidad** a la hora de tomar una decisión. Cuanto más específica es una decisión menor es la preocupación que ésta provoca.
- Otra aplicación importante es la utilización de estas medidas para observar el rendimiento de sistemas expertos borrosos. En este entorno el concepto de especificidad juega un papel fundamental para determinar la **utilidad** de la información que proporciona un sistema experto. Cuanto más específica sea la información, más útil será.
- En los sistemas de **razonamiento deductivo** también las medidas de especificidad juegan un papel importante.

Ejemplo 3.1.1:

Se imagina un sistema experto que evalúe las enfermedades del pulmón. Se consulta un caso y si las respuestas fueran:

1. Tiene pulmonía o bronquitis o tuberculosis o cualquier otra enfermedad
2. Tiene pulmonía con un valor de pertenencia 1 y el resto de enfermedades tienen valor de pertenencia 0

Aunque la primera respuesta es seguro que es cierta, no nos proporciona información. La segunda respuesta es muy idónea, muy específica. Tiene el valor máximo de medida de especificidad ya que es un conjunto clásico con un único elemento.

Estos ejemplos introducen el **principio de intercambio** entre especificidad y certeza (*specificity-correctness tradeoff*) en teoría de la información [R. R Yager; 1985]. Este principio postula que debe haber un equilibrio entre proporcionar una información y el riesgo que supone su falta de veracidad. Son deseables la veracidad y la especificidad de la información proporcionada por sistemas expertos y otros tipos de sistemas basados en el conocimiento para que dicha información sea útil. Por lo tanto el rendimiento de un sistema depende de las medidas de especificidad y de la certeza. La utilidad de la información se debe medir como una función, el producto por ejemplo, de la certeza y la especificidad.

Dado un sistema experto borroso con una entrada y una salida borrosa, se reflexiona sobre la aplicación de las medidas de especificidad para el estudio del rendimiento del sistema experto borroso. Suponamos que para la i-ésima entrada del sistema experto, la salida es el conjunto borroso μ_i y la salida correcta es un conjunto de un solo elemento x_i. Se podría considerar en primer lugar como una medida del rendimiento del sistema el grado de acierto del sistema en este caso, que podría ser valorado como el grado de pertenencia de x_i en μ_i, $\mu_i(x_i)$. Sin embargo se debe tener cuidado si únicamente se usase esa medida, pues si por ejemplo la salida fuese todo el conjunto referencial μ_i=X se tendría que $\mu_i(x_i)$=1 y nuestro grado de acierto sería uno. El problema es que esta respuesta no es útil pues nos dice que efectivamente la respuesta puede ser cualquier valor. Para que una salida del sistema experto sea útil y se puedan identificar las salidas que realmente proporcionen información se puede medir la especificidad (Sp(μ_i) o ME(μ_i)) de la salida, y medir el rendimiento de cada elemento de una salida asociando el grado de acierto con la medida de especificidad, como el producto entre la certeza y la especificidad, es decir, Rendimiento(i) = $\mu_i(x_i) \times \text{Sp}(\mu_i)$.

3.2. MEDIDA DE ESPECIFICIDAD

En este apartado se resumen brevemente las medidas de especificidad estudiadas por *Yager*. *Yager* define así [R. R Yager; 1990] una medida de especificidad:

***Definición 3.2.1*: Medida de especificidad**

Sea A un subconjunto borroso sobre un universo finito X y sea a_j el j-ésimo grado de pertenencia de A ordenados de mayor a menor. Una medida Sp: $[0, 1]^X \to [0, 1]$ es una **medida de especificidad** si verifica las siguientes propiedades:

1) Sp(A) = 1 si y sólo si A es un conjunto clásico de un único elemento, es decir, A = $\{x\}$.
2) Sp(∅) = 0

   3.1) $\dfrac{\partial\, Sp(A)}{\partial\, a_1} > 0$

   3.2) $\dfrac{\partial\, Sp(A)}{\partial\, a_j} \leq 0$ para todo $j \geq 2$

Yager propone distintas medidas de especificidad de forma que en cada aplicación se pueda utilizar la más adecuada. Las siguientes definiciones permiten distinguir algunas diferencias interesantes entre distintas medidas de especificidad.

***Definición 3.2.2*: Medida de especificidad más estricta**

Sean Sp y Sp* dos medidas de especificidad sobre un universo X. Se dice que Sp es una medida de especificidad **más estricta** que Sp*, y se denota Sp≤Sp*, si para todo subconjunto borroso A de X se tiene que Sp(A)≤Sp*(A).

***Definición 3.2.3*: Medida de especificidad más crítica**

Dadas dos medidas de especificidad Sp y Sp* sobre un universo X, se dice que Sp es ***más crítica que*** Sp* si sus pesos asociados w_j y w_j* (Ver [R. R Yager; 1990])verifican que $w_j \geq w_j$* para todo j.

Definición 3.2.4*: *Medida de especificidad regular

Una medida de especificidad es **regular** si para todos los subconjuntos borrosos A con grados de pertenencia constante ($A(x) = c$ para todo $x \in X$), se tiene que $Sp(A) = 0$.

Se observa que la medida de especificidad de *Yager* es una medida definida sobre subconjuntos borrosos que no es monótona respecto de la inclusión conjuntista.

Los siguientes conceptos y resultados son originales:

3.3. CONCEPTO DE $\prec$-MEDIDA BORROSA DE ESPECIFICIDAD EN UNIVERSOS FINITOS

En este apartado se definen nuevas medidas, las $\prec$-medidas borrosas de especificidad, utilizando t-normas, t-conormas y negaciones. Se estudian sus propiedades para comprobar bajo qué condiciones es una medida de especificidad de las estudiadas por *Yager*. Se observa que si dos subconjuntos están relacionados mediante la inclusión sus $\prec$-medidas borrosas de especificidad no están relacionadas. Así, tanto las medidas de especificidad de *Yager* como estas $\prec$-medidas borrosas de especificidad no verifican que si $A \subset B$ entonces la medida(A)$\leq$medida(B). Existe una cualidad de los subconjuntos difusos de ser más o menos específicos que no está relacionada con la inclusión y que es la que se pretende medir. Se tiene definido un preorden distinto de la inclusión conjuntista, y esta medida se comprueba que es una $\prec$-medida borrosa de las estudiadas por *Trillas y Alsina* [Trillas, 1999].

Definición 3.3.1: $\prec$-Medida borrosa de especificidad

Sea A un subconjunto difuso de un conjunto referencial finito X=$\{e_i\}$ con d elementos, y sean b_i los valores de pertenencia de los elementos de X tal que A(e_i)=b_i. Los valores de pertenencia $b_i \in [0, 1]$ se ordenan totalmente siendo a_j el j-ésimo mayor valor de pertenencia de A. Sea N una negación, T_1 y T_3 t-normas y S una t-conorma generalizada. Sea $\{w_j\}$ un conjunto de pesos.

Se define la $\prec$-medida borrosa de especificidad como la aplicación sobre los subconjuntos borrosos de un conjunto, ME: $[0, 1]^X \rightarrow [0, 1]$ tal que:

$$\mathbf{ME(A) = T_1(}a_1\mathbf{, N(S}_{j=2,..,d}\mathbf{\{T_3(}a_j, w_j\mathbf{)\})) = T_1(}a_1\mathbf{, N(P_A))}$$

Observación:

Se pretende que la *especificidad* de un conjunto difuso sea alta si "tiene al menos un elemento ***y*** no tiene mucho más que un elemento". Tener "al menos un elemento" se representa por el mayor valor de pertenencia a_1; la cópula **"*y*"** por la t-norma T_1; y una medida del grado en que A "no tiene mucho más que un elemento" por N(P_A), donde P_A = $S_{j=2,..,d}\{T_3(a_j, w_j)\}$ indica que A "tiene mucho más que un elemento".

Se estudia si la $\prec$-medida borrosa de especificidad verifica las propiedades que definen una medida de especificidad:

Lema 3.3.1:

La $\prec$-medida borrosa de especificidad del conjunto vacío es cero

Demostración:

En efecto si a_j=0 para todo j, entonces a_1=0, luego:

ME(A) = T(a_1, N(P_A)) = T(0, N(P_A)) = 0. ∎

Lema 3.3.2:

Si el conjunto A es un conjunto clásico con un único elemento entonces su $\prec$-medida borrosa de especificidad es uno.

Demostración:

Sea A un conjunto clásico con un único elemento. Entonces a_1=1 y a_j=0 para todo j desde 2 hasta d, luego ME(A) = $T_1(a_1, N(P_A))$ = $T_1(1, N(P_A))$ = $N(P_A)$ = $N(S_{j=2..d}\{T_3(0, w_j)\})$ = $N(S_{j=2..d}\{0\})$ = N(0) =1. ∎

Observación:

Es deseable que la $\prec$-medida borrosa de especificidad valga uno si y sólo si el conjunto A es un conjunto clásico con un único elemento. Sin embargo vale uno en otras ocasiones: Si se supone que ME(A)=1, entonces 1 = $T_1(a_1, N(P_A))$, por lo que debe ser a_1=1 y $N(P_A)$=1. Luego A es un subconjunto normal y $P_A = 0 = S_{j=2..d}\{T_3(a_j, w_j)\}$, lo que significa que para todo j mayor o igual a dos debe ser $T_3(a_j, w_j) = 0$. Puede valer cero porque a_j sea igual a cero para todo j mayor o igual a dos, lo que nos llevaría a la conclusión deseada de ser A un conjunto clásico de un solo elemento. Pero también puede valer cero si la t-norma T_3 no es positiva, (con *Min* o *Prod* no habría problemas pero sí con una t-norma de la familia de *Łukasiewicz*), pues podría ser $T_3(a_j, w_j)$=0 sin valer cero ni a_j ni w_j. Y puede también valer cero si w_j es igual a cero cuando a_j sea distinto de cero, luego se deben imponer condiciones a los pesos y la t-norma T_3 para que esto no ocurra.

Definición 3.3.2 : ***$\prec$-Medida borrosa de especificidad adecuada***

Una $\prec$-medida borrosa de especificidad es **adecuada** si el único conjunto difuso que verifica que su $\prec$-medida borrosa de especificidad es uno es un conjunto clásico con un único elemento.

Lema 3.3.3:

Si la t-norma T_3 es positiva y el peso w_2 es distinto de cero entonces la $\prec$-medida borrosa de especificidad es **adecuada**.

Demostración:

Si ME(A) = 1 entonces $1 = T_1(a_1, N(P_A))$, por lo que debe ser $a_1=1$ y $N(P_A)=1$. Por tanto A es un subconjunto difuso normal y

$$P_A = 0 = S_{j=2..d}\{T_3(a_j, w_j)\},$$

lo que significa que para todo j mayor o igual a dos debe ser $T_3(a_j, w_j)=0$. Como por hipótesis T_3 es una t-norma positiva debe ser o $a_j=0$ o $w_j=0$. Al ser w_2 distinto de cero debe ser $a_2=0$. Y al estar ordenados los valores de pertenencia el resto de los valores de pertenencia también se anulan. Por tanto A es un subconjunto clásico de un único elemento. ∎

Lema 3.3.4:

Si la t-norma T_3 es de la familia de *Łukasiewicz* y el peso w_2 es igual a uno entonces la $\prec$-medida borrosa de especificidad es **adecuada**.

Demostración:

Si ME(A) = 1 A debe ser un subconjunto difuso normal y para todo j mayor o igual a dos debe ser $T_3(a_j, w_j)=0$, y en particular $T_3(a_2, w_2)=0$. Si T_3 es una t-norma de la familia de *Łukasiewicz* entonces $T_3(x, y)=\varphi^{-1}(W(\varphi(x), \varphi(y)))$ (ver apéndice 6.1), siendo $W(x, y)=Máx\{0, x+y-1\}$ y φ una función continua estrictamente creciente definida en [0, 1] con $\varphi(0)=0$ y $\varphi(1)=1$, luego:

$$0 = T_3(a_2, w_2) = \varphi^{-1}(Máx\{0, \varphi(a_2)+\varphi(w_2) -1\}) = \varphi^{-1}(Máx\{0, \varphi(a_2)\})$$

ya que como $w_2=1$ entonces $\varphi(w_2)=1$. Por tanto $Máx\{0, \varphi(a_2)\}=0$, luego $\varphi(a_2)=0$, por lo que a_2 debe ser 0. Al estar ordenados los valores de pertenencia el resto de los valores de pertenencia también valen cero. Por tanto A es un subconjunto clásico de un único elemento. ∎

Lema 3.3.5:

Si A y B son subconjuntos difusos normales y A⊂B entonces ME(A) ≥ ME(B).

Demostración:

Si a_j y b_j son los j-ésimos mayores valores de pertenencia de A y B respectivamente entonces como son normales $a_1=b_1=1$, y como A⊂B se sabe que $a_j \leq b_j$ para todo j, luego $T_3(a_j, w_j) \leq T_3(b_j, w_j)$, $S_{j=2..d}\{T_3(a_j, w_j)\} \leq S_{j=2..d}\{T_3(b_j, w_j)\}$ y $N(S_{j=2..d}\{T_3(a_j, w_j)\}) \geq N(S_{j=2..d}\{T_3(b_j, w_j)\})$. Por tanto

$$ME(A) = T_1(a_1, N(P_A)) = T_1(1, N(P_A)) = N(P_A) = N(S_{j=2..d}\{T_3(a_j, w_j)\})$$

$$\geq N(S_{j=2..d}\{T_3(b_j, w_j)\}) = T_1(1, N(P_B)) = ME(B)$$

y por tanto ME(A) ≥ ME(B). ∎

Teorema 3.3.1:

Si el peso w_2 es distinto de cero y la t-norma T_3 es positiva o si la t-norma T_3 es de la familia de *Łukasiewicz* y el peso w_2 es igual a uno, entonces la $\prec$-medida borrosa de especificidad definida por $ME(A) = T_1(a_1, N(S_{j=2,..,d}\{T_3(a_j, w_j)\}))$ es una medida de especificidad.

Demostración:

Es consecuencia inmediata de los lemas 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3, 3.3.4 y 3.3.5, ya que entonces verifica las propiedades de la medida de especificidad definida por *Yager* [*Yager*, 1990]. ∎

Propiedad 3.3.1:

Si A es un subconjunto clásico con m elementos $1< m \leq d$ entonces

$$ME(A) = N(S\{w_2, ..., w_m\})$$

Demostración:

Al ser A un subconjunto clásico se tiene que a_j=1 para j desde 1 hasta m y a_j=0 para j desde m+1 hasta d, luego

$$\begin{aligned}
\mathrm{ME(A)} &= \mathrm{T_1}(a_1, \mathrm{N(P_A)}) \\
&= \mathrm{T_1}(1, \mathrm{N(P_A)}) = \mathrm{N(P_A)} \\
&= \mathrm{N}(\mathrm{S}_{\,j=2..d}\{\mathrm{T_3}(a_j, w_j)\}) \\
&= \mathrm{N}(\mathrm{S}\{\mathrm{T_3}(1, w_2), \ldots, \mathrm{T_3}(1, w_m), \mathrm{T_3}(0, w_{m+1}), \ldots, \mathrm{T_3}(0, w_d)\}) \\
&= \mathrm{N}(\mathrm{S}\{w_2, \ldots, w_m, 0, \ldots, 0\}) \\
&= \mathrm{N}(\mathrm{S}\{w_2, \ldots, w_m\}).\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Corolario 3.3.1:

Si A y B son subconjuntos clásicos no vacíos de X y card(A) ≥ card(B) entonces ME(A) ≤ ME(B).

Demostración:

Al ser A y B subconjuntos clásicos se tiene que a_j=1 para j desde 1 hasta m=card(A) y a_j=0 para j desde m+1 hasta d, y b_j=1 para j desde 1 hasta s=card(B) y b_j=0 para j desde s+1 hasta d, y $m \geq s$. Luego

$$\begin{aligned}
\mathrm{ME(A)} &= \mathrm{T_1}(a_1, \mathrm{N(P_A)}) = \mathrm{N}(\mathrm{S}_{\,j=2..d}\{\mathrm{T_3}(a_j, w_j)\}) \\
&\leq \mathrm{N}(\mathrm{S}\{w_2, \ldots, w_s, 0, \ldots, 0\} = \mathrm{ME(B)}.\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Es conveniente que la especificidad del conjunto universal X sea cero, pues el conjunto universal no es especifico, no es adecuado. Se analiza bajo que condiciones se verifica esta condición:

Propiedad 3.3.2:

Si A=X y $Máx\{w_2, \ldots, w_d\}$=1 entonces ME(X)=0

Demostración:

Si $S\{w_2, ..., w_d\}=1$ ya estaría demostrado como corolario de la propiedad anterior, pues $ME(X) = N(S\{w_2, ..., w_d\}) = N(1) = 0$.

Pero en cualquier caso si $Máx\{w_2, ..., w_d\}$ es igual a 1 por la relación de orden entre las t-conormas se tiene que

$ME(X) = N(S_{j=2..d}\{w_2, ..., w_d\} \leq N(Max\{w_2, ..., w_d\}) = N(1) = 0$. ∎

Propiedad 3.3.3:

Si A=X, S es la t-conorma de *Łukasiewicz* y $\sum_{j=2}^{d} w_j = 1$, entonces ME(X)=0

Demostración:

Si S es la t-conorma de Łukasiewicz entonces $S_{j=2..d}(w_2, ..., w_d) = \sum_{j=2}^{d} w_j =$ 1 y $ME(A) = T_1(1, N(S_{j=2..d}\{T_3(a_j, w_j)\})) = N(S_{j=2..d}\{w_2, ..., w_d\}) = N(\sum_{j=2}^{d} w_j) =$ $N(1) = 0$. ∎

Se busca una forma más sencilla de expresar la $\prec$-medida borrosa de especificidad:

Propiedad 3.3.4:

Si $T_3=\wedge$ y $S=\vee$ es su t-conorma dual respecto de la negación ' entonces $ME(A) = T_1\{a_1, (a_2'\vee w_2')\wedge...\wedge(a_n'\vee w_d')\}$, y si $T_1= T_3=\wedge$ entonces:

$$\mathbf{ME(A)} = \boldsymbol{a_1 \wedge (a_2' \vee w_2') \wedge ... \wedge (a_d' \vee w_d')}$$

Demostración:

Si S es la t-conorma generalizada dual de T verifica que $N(S(x, y, ..., z)) = T(N(x), N(y),..., N(z))$ y $N(T(x, y))= S (N(x), N(y))$, luego en nuestro caso

$$N(S_{j=2..d}\{T_3(a_j, w_j)\}) = T_{3\ j=2..d}\ \{N\ (T_3\ (a_j, w_j))\}$$
$$= T_{3\ j=2..d}\ \{S\ (N(a_j), N(w_j))\}$$
$$= (a_2' \vee w_2') \wedge \ldots \wedge (a_d' \vee w_d')$$

con lo que ya se puede indicar la $\prec$-medida borrosa de especificidad con la expresión señalada. ∎

Definición 3.3.3:

Se dice que dos $\prec$-medidas borrosas de especificidad pertenecen a la misma ***clase de $\prec$-medidas borrosas de especificidad*** si están definidas mediante las mismas t-normas T_1 y T_3, la misma t-conorma S y la misma negación N.

Propiedad 3.3.5:

Sean ME y ME* dos $\prec$-medidas borrosas de especificidad de la misma clase, si ME es más crítica que ME* entonces ME es más estricta que ME*.

Demostración:

Al ser ME más crítica que ME* se sabe que $w_j \geq w_j^*$ para todo j luego para cualquier subconjunto difuso A se tiene que:

$T_3(a_j, w_j) \geq T_3(a_j, w_j^*)$ para todo j

$\Rightarrow S_{j=2..d}\{T_3(a_j, w_j)\} \geq S_{j=2..d}\{T_3(a_j, w_j^*)\}$

$\Rightarrow N(S_{j=2..d}\{T_3(a_j, w_j)\}) \leq N(S_{j=2..d}\{T_3(a_j, w_j^*)\})$

$\Rightarrow T_1(a_1, N(S_{j=2..d}\{T_3(a_j, w_j)\})) \leq T_1(a_1, N(S_{j=2..d}\{T_3(a_j, w_j^*)\}))$

$\Rightarrow$ ME(A) $\leq$ ME*(A) para todo A, luego ME es más estricta que ME*. ∎

Observación:

Las $\prec$-medidas borrosas de especificidad no son monótonas respecto de la inclusión conjuntista pues es deseable que sea máxima para todos los subconjuntos normales con un único elemento, y sea mínima no sólo para el subconjunto vacío sino también para el conjunto referencial. Por tanto tampoco es σ-aditiva, ni superaditiva, ni subaditiva.

Entre los subconjuntos difusos existe un preorden que los ordena según sean más o menos específicos. El ser específico es la característica que se pretende medir. Por esto la medida de especificidad definida por *Yager*, y las expresión de las $\prec$-medidas borrosas de especificidad no es una medida borrosa monótona respecto de la inclusión conjuntista [Nguyen-Walker; 1996] sino que utiliza un preorden distinto de la inclusión. Es una $\prec$-medida borrosa según Trillas y Alsina [Trillas, 1999] pues verifican que $ME(\emptyset) = Sp(\emptyset) = 0$ (lema 3.3.1); que si tiene la máxima especificidad, es decir, si A es un subconjunto clásico con un único elemento entonces $ME(A) = Sp\ (A) =1$ (Lema 3.3.2). Si aumenta la especificidad porque aumenta el mayor valor de pertenencia, o porque disminuyen los otros, entonces la $\prec$-medida borrosa de especificidad y la medida de especificidad aumentan. En particular si A y B son normales y $A \subset B$ entonces $ME(A) \geq ME(B)$ (Lema 3.3.5). Se puede concluir por tanto que la medida de especificidad definida por *Yager*, y las $\prec$-medidas borrosas de especificidad son $\prec$-medidas borrosas según Trillas y Alsina que miden la propiedad de "ser específico" no relacionada con la inclusión conjuntista. Es normal pues su valor máximo es uno.

3.4. EJEMPLOS

La expresión de la $\prec$-medida borrosa de especificidad permite obtener muchas formulaciones diferentes de medidas de especificidad. Estas medidas juegan un papel fundamental en el desarrollo de procedimientos y algoritmos para gestionar y reducir la incertidumbre por lo que se debe elegir la medida de especificidad adecuada para cada aplicación. La sencillez es siempre deseable.

Por tanto es conveniente encontrar distintas manifestaciones de esta medida para así poder seleccionar la apropiada para una aplicación dada.

Se comprueba en primer lugar que las medidas de especificidad utilizadas en la bibliografía son $\prec$-medidas borrosas de especificidad y se encuentran nuevos ejemplos:

Ejemplo 3.4.1

Yager introdujo [Yager; 1990] una clase de medidas llamadas **medidas de especificidad lineales** definidas de la siguiente manera:

Sea X un universo finito de cardinal d y sea A un subconjunto borroso de X. La medida de especificidad lineal se define como:

$$\mathbf{Sp(A)} = a_1 - \sum_{j=2}^{d} w_j\, a_j$$

donde a_j es el j-ésimo mayor valor de pertenencia de A y $\{w_j\}$ es un conjunto de pesos que verifica:

1. $w_j \in [0, 1]$
2. $\sum_{j=2}^{d} w_j = 1$, $w_1=0$
3. Para todo $j < i$ mayores o iguales a dos, $w_j \geq w_i$.

Propiedad 3.4.1:

Las medidas de especificidad lineales son $\prec$-medidas borrosas de especificidad.

Demostración:

Sean T_1 la t-norma de *Łukasiewicz* definida por $T_1(a, b) = Máx\{0, a+b-1\}$, N la negación usual definida por $N(x) = 1-x$, S su t-conorma dual definida por $S(a, b) = mín\{1, a+b\}$ y T_3 la t-norma producto. Entonces:

$$\begin{aligned}
ME(A) &= T_1(a_1, N(S_{j=2,..,d}\{T_3(a_j, w_j)\})) \\
&= T_1(a_1, N(P_A)) \\
&= \text{Máx}\{0, a_1+N(P_A)-1\} \\
&= \text{Máx}\{0, a_1+(1-P_A)-1\} \\
&= \text{Máx}\{0, a_1-P_A\} \\
&= \text{Máx}\{0, a_1- S_{j=2,..,d}\{T_3(a_j, w_j)\}\} \\
&= \text{Máx}\{0, a_1 - \min\{1, \sum_{j=2}^{d} T_3(a_j, w_j)\} \\
&= \text{Máx}\{0, a_1 - \min\{1, \sum_{j=2}^{d} a_j w_j\}\}.
\end{aligned}$$

Ahora bien

- $a_j \leq 1 \Rightarrow \sum_{j=2}^{d} a_j w_j \leq \sum_{j=2}^{d} 1 \cdot w_j = \sum_{j=2}^{d} w_j = 1 \Rightarrow min\{1, \sum_{j=2}^{d} a_j w_j\}\} = \sum_{j=2}^{d} a_j w_j$

- $a_1 \geq a_j \Rightarrow \sum_{j=2}^{d} a_j w_j \leq \sum_{j=2}^{d} a_1 w_j = a_1 \sum_{j=2}^{d} w_j = a_1$

$$\Rightarrow a_1 - \sum_{j=2}^{d} a_j w_j \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{Máx}\{0, a_1 - \sum_{j=2}^{d} a_j w_j\} = a_1 - \sum_{j=2}^{d} a_j w_j .$$

Luego $ME(A) = \text{Máx}\{0, a_1 - \min\{1, \sum_{j=2}^{d} a_j w_j\}\} = a_1 - \sum_{j=2}^{d} a_j w_j$. ∎

Yager [Yager; 1998] prueba las siguientes propiedades de las medidas de especificidad lineales:

- Las medidas de especificidad lineales son regulares.

- La medida de especificidad lineal **más estricta** es Sp(A) = $a_1 - a_2$.
- La medida de especificidad lineal **menos estricta** es

$$\mathrm{Sp(A)} = a_1 - \frac{1}{n-1}\sum_{j=2}^{d} a_j .$$

Ejemplo 3.4.2

Es interesante estudiar las medidas de especificidad desde la perspectiva de los problemas de toma de decisiones multi-criterio. Se requiere una medida de especificidad para conocer si existe un elemento con valor de pertenencia uno y todos los demás con valor cero. *Yager* [Yager; 1990] considera el ejemplo siguiente:

$$\mathbf{Sp(A)} = \boldsymbol{a_1}\prod_{j=2}^{d} (\boldsymbol{ka_j} + (\mathbf{1}-\boldsymbol{a_j})) \text{ donde } k \in [0, 1).$$ [1]

Ejemplo 3.4.3:

Un ejemplo más general es:

$$\mathbf{ME(A\ )} = \boldsymbol{a_1}\prod_{j=2}^{d}(1-w_j a_j) \text{ donde } w_j \in (0, 1]$$

Propiedad 3.4.2:

Las medidas de los ejemplos 3.4.2 y 3.4.3 son $\prec$-medidas borrosas de especificidad.

Demostración:

Se ha probado en la propiedad 3.3.4 que ME(A) = $a_1 \wedge (a_2' \vee w_2') \wedge \ldots \wedge (a_n' \vee w_d')$ es una $\prec$-medida borrosa de especificidad donde $\{\wedge, \vee, '\}$ indica una terna lógica cualquiera. Sea $\wedge$ la t-norma producto y sea $\vee$ su t-conorma dual

[1] *Yager* considera $k \in [0, 1]$, pero entonces Sp no es una medida de especificidad.

$\vee(a, b) = a+b-a.b$ respecto de la negación usual definida por $N(x)=1-x$. Entonces:

$$\begin{aligned} a_j' \vee w_j' &= (1-a_j) + (1-w_j) - (1-a_j)(1-w_j) \\ &= (1-a_j) + (1-w_j) - (1-a_j-w_j+a_j w_j) \\ &= 1 - a_j w_j. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ME(A) &= a_1 \wedge (a_2' \vee w_2') \wedge \ldots \wedge (a_n' \vee w_d') \\ &= a_1 \prod_{j=2}^{d} (a_j' \vee w_j') = a_1 \prod_{j=2}^{d} (1 - w_j a_j). \end{aligned}$$

Si para todo j desde 2 hasta d w_j toma un valor constante $h \in (0, 1]$ y $k = 1-h$, entonces:

$$ME(A) = a_1 \prod_{j=2}^{d} (1-(1-k)a_j) = a_1 \prod_{j=2}^{d} (ka_j + (1-a_j)) \text{ donde } k \in [0, 1). \blacksquare$$

***Propiedad 3.4.3*:**

Si $w_j \in (0, 1]$ para todo j mayor o igual a dos entonces $ME(A) = a_1 \prod_{j=2}^{d} (1-w_j a_j)$ es una $\prec$-medida borrosa de especificidad adecuada.

Demostración:

$ME(A) = a_1 \prod_{j=2}^{d} (1-w_j a_j) = 1$ si y sólo si $a_1=1$ y $1-w_j a_j = 1$ para todo j mayor o igual a dos, luego $w_j a_j = 0$, por lo que si w_j es distinto de cero para todo j mayor o igual a dos entonces debe ser $a_j=0$ para todo j mayor o igual a dos. Luego A es un conjunto clásico con sólo un elemento. ∎

Corolario 3.4.1

$\mathrm{ME(A)} = a_1 \prod_{j=2}^{d}(1-w_j a_j)$ con $w_j \in (0, 1]$ para todo j mayor o igual a dos es una medida de especificidad

Observación:

Si k=1, h=0 en el ejemplo 3.4.2 entonces Sp(A) no es una medida de especificidad ya que $\mathrm{Sp(A)} = a_1 \prod_{j=2}^{d} (a_j+1-a_j) = a_1 \prod_{j=2}^{d} (1) = a_1$ luego bastaría que A fuese un conjunto difuso normal para que su medida de especificidad fuese uno.

***Propiedades*:**

Las $\prec$-medidas borrosas de especificidad de los ejemplos 3.4.2 y 3.4.3 no son $\prec$-medidas de especificidad regulares.

Demostración:

No es regular, pues si A(x) = α para todo x, entonces ME(A) = $\alpha(1 - w_j\alpha)^{d-1}$ que es distinto de cero salvo si α=0, (A es el conjunto vacío), o si $1 - w_j\alpha = 0$, es decir, si $w_j\alpha$=1, que sólo se verifica si w_j=1 y α=1 (A es el conjunto universal). Luego si A es un subconjunto difuso constante ME(A)=0 sólo si A es el conjunto vacío o A es el conjunto universal. ∎

- Como $0 \le w_j \le 1$, $0 \le w_j a_j \le a_j$, y $a_1 \prod_{j=2}^{d}(1-a_j) \le a_1 \prod_{j=2}^{d}(1-w_j a_j) \le a_1$, luego

$$\mathrm{ME(A)} = a_1\,(1-a_2)(1-a_3)....(1-a_d) = a_1 \prod_{j=2}^{d}(1-a_j).$$

es la $\prec$-medida borrosa de especificidad **más estricta** de esta familia, y la menos estricta se obtendría para w_j =0 para todo j, que se ha visto que no es una $\prec$-medida borrosa de especificidad adecuada.

Ejemplo 3.4.4:

Estudio de la $\prec$-medida borrosa de especificidad definida por la cuaterna (Min, N, Máx, Min) donde N es la negación usual N(x)=1-x

$$ME(A) = \text{Mín}\{a_1, N(\text{Máx}_{2..d}\{\text{Mín}\{a_j, w_j\}\}\}$$

$$= \mathbf{Mín\{a_1, 1\text{-}Máx_{2..d}\{Mín\{a_j, w_j\}\}\}}$$

Si los pesos los hacemos iguales a uno se tiene:

$$ME(A) = \text{Mín}\{a_1, 1\text{-Máx}_{2..d}\{\text{Mín}\{a_j, 1\}\}\}$$

$$= \text{Mín}\{a_1, 1\text{-Máx}_{2..d}\{a_j\}\}$$

$$= \mathbf{Mín\{a_1, 1\text{-}a_2\}}$$

y en el caso en que el subconjunto borroso sea normal:

$$ME(A) = \text{Mín}\{a_1, 1\text{-}a_2\}=1\text{-}a_2$$

Esta $\prec$-medida borrosa de especificidad tiene las siguientes propiedades:

$ME(A)=\text{Mín}\{a_1, 1\text{-}a_2\}$ es una medida de especificidad, pues ME(A)=1 si y sólo si A={x}. En efecto: $ME(A)=1 = \text{Mín}\ \{a_1, 1\text{-}a_2\} \Rightarrow a_1=1,\ 1\text{-}a_2=1 \Rightarrow$ A es normal y $a_2=0 \Rightarrow A=\{x\}$.

Si w_2 es distinto de cero la $\prec$-medida borrosa de especificidad definida en la forma más general $ME(A) = \text{Mín}\{a_1, 1\text{-Máx}_{2..d}\{\text{Mín}\{a_j, w_j\}\}\}$ es una medida de especificidad pues $ME(A) =1= \text{Mín}\{a_1, 1\text{-Máx}_{2..d}\{\text{Mín}\{a_j, w_j\}\}\}$

$\Rightarrow a_1=1,\ 1\text{-Máx}_{2..d}\{\text{Mín}\{a_j, w_j\}\}=1$

$\Rightarrow$ A es normal y $\text{Máx}_{2..d}\{\text{Mín}\{a_j, w_j\}\}=0$

$\Rightarrow$ A es normal y $\text{Mín}\{a_j, w_j\}=0$ para todo j desde 2 hasta d.

Y si w_2 es distinto de cero $Min\{a_2, w_2\}=0$ determina que $a_2=0$, luego es una medida de especificidad, pues A es un subconjunto clásico de un único elemento.

3.5. ESTUDIO DE LAS $\prec$-MEDIDAS BORROSAS DE ESPECIFICIDAD DEFINIDAS MEDIANTE FAMILIAS DE T-NORMAS, NEGACIONES Y T-CONORMAS.

En este apartado se estudian propiedades de las familias de t-normas, de las familias de negaciones y de las familias de t-conormas para utilizarlas para obtener muchas expresiones distintas de $\prec$-medidas borrosas de especificidad, con lo cual se obtienen métodos para generar numerosos ejemplos diferentes.

Ver la definición de **familia de t-normas** de una t-norma T , y de T_φ en el apéndice 6.1.

3.5.1. Sobre la familia de normas asociada a una t-norma

Proposición 3.5.1.1:

Si φ es automorfismo del semigrupo ([0, 1], T), esto es, si $\varphi(T(a, b)) = T(\varphi(a), \varphi(b))$ entonces $T = T_\varphi$.

Demostración:

$T(x, y) = \varphi^{-1}(\varphi(T(x, y))) = \varphi^{-1}(T(\varphi(a), \varphi(b))) = T_\varphi(x, y)$. ∎

Proposición 3.5.1.2:

Si $\varphi(T(a, b)) \leq T(\varphi(a), \varphi(b))$ entonces $T \leq T_\varphi$.

Demostración:

Por ser φ biyectiva:

$T(x, y) = \varphi^{-1}(\varphi(T(x, y))) \leq \varphi^{-1}(T(\varphi(a), \varphi(b))) = T_\varphi(x, y)$. ∎

Proposición 3.5.1.3

Si $\varphi(T(a, b)) \geq T(\varphi(a), \varphi(b))$ entonces $T \geq T_\varphi$.

Demostración:

Por ser φ biyectiva:

$T(x, y) = \varphi^{-1}(\varphi(T(x, y))) \geq \varphi^{-1}(T(\varphi(a), \varphi(b))) = T_\varphi(x, y)$. ∎

Observación

Todas las biyecciones con puntos fijos en 0 y 1 son monótonas crecientes, luego son automorfismos de ([0, 1], Min), pues $\varphi(\mathrm{Min}(x, y)) = \mathrm{Min}(\varphi(x), \varphi(y))$. Por ello la familia de t-normas de la t-norma mínimo consta únicamente de la t-norma mínimo.

Ejemplo 3.5.1.1

Si $\varphi(x) = x^2$ entonces φ es automorfismo de ([0, 1], Prod), pero no lo es de ([0,1], W), donde $W(x, y) = \mathrm{Max}(0, x+y-1)$. Sin embargo $(W(x, y))^2 \geq W(x^2, y^2)$ y $W \geq W_{x^2}$.

Demostración:

Como $(xy)^2 = x^2y^2$ entonces $\varphi(x)=x^2$ es un automorfismo de ([0,1], Prod). Sin embargo se observa que $(W(x, y))^2 \neq W(x^2, y^2)$, pues si $x=y=0.9$ entonces $(W(x, y))^2 = 0.8^2 = 0.64 \neq 0.62 = W(x^2, y^2) = 0'81 + 0'81 - 1$.

Se comprueba que $(W(x, y))^2 \geq W(x^2, y^2)$. Como $1 \geq y$ entonces $2-2x \geq y(2-2x)$, luego $2xy - 2y - 2x + 1 \geq -1$, y sumando x^2 e y^2 se tiene que $x^2+y^2+2xy-2y-2x+1 \geq x^2+y^2-1$.

Por lo tanto $(\mathrm{Max}(0,x+y-1))^2 \geq \mathrm{Max}(0,x^2+y^2-1)$. ∎

Ejemplo 3.5.1.2:

Si $\varphi(x) = \sqrt{x}$ entonces φ es automorfismo de ([0, 1], Prod), pero no lo es de ([0,1], W), donde W(x, y) = Max(0, x+y−1). Sin embargo $\sqrt{W(x,y)} \geq W(\sqrt{x}, \sqrt{y})$ y $W \geq W_{\sqrt{x}}$.

Demostración:

Como $\sqrt{(xy)} = \sqrt{x}.\sqrt{y}$ entonces $\varphi(x) = \sqrt{x}$ es automorfismo de ([0, 1], Prod). Pero se observa que $\sqrt{W(x,y)} \neq W(\sqrt{x}, \sqrt{y})$, pues si x = y = 0.9, entonces $\sqrt{W(x,y)} = 0.89 \neq 0.78 = W(\sqrt{x}, \sqrt{y})$.

Se comprueba que $\sqrt{W(x,y)} \geq W(\sqrt{x}, \sqrt{y})$. Como $1 \geq \sqrt{y}$, multiplicando por $2\sqrt{x}-2$ se tiene que $2\sqrt{x}-2 \geq \sqrt{y}(2\sqrt{x}-2)$, luego $-1 \geq 2\sqrt{x}\sqrt{y}-2\sqrt{x}-2\sqrt{y}+1$. Sumando x , y se tiene que $x+y-1 \geq x+y+2\sqrt{x}\sqrt{y}-2\sqrt{x}-2\sqrt{y}+1$.

Por lo tanto $x+y-1 \geq (\sqrt{x}+\sqrt{y}-1)^2$ y $\sqrt{x+y-1} \geq \sqrt{x}+\sqrt{y}-1$ por lo que $\sqrt{Max(0,x+y-1)} \geq Max(0, \sqrt{x}+\sqrt{y}-1)$, y $W \geq W_{\sqrt{x}}$. ∎

Proposición 3.5.1.4:

Si $\varphi(x) = x^q$, $q>0$, $q \in Q$, entonces φ es automorfismo de ([0, 1], Prod), pero no lo es de ([0, 1], W).

Demostración:

Como $(xy)^q = x^q y^q$ entonces $\varphi(x)=x^q$ es un automorfismo de ([0, 1], Prod). Los ejemplos anteriores sirven para comprobar que no lo es de ([0, 1], W). ∎

Proposición 3.5.1.5:

Si $w>0$ entonces $\varphi_w(x)=2x^w-x^{2w}=x^w(2-x^w)$ es biyectiva con $\varphi_w(0)=0$ y $\varphi_w(1)=1$.

Demostración:

Derivando φ_w se obtiene $\varphi_w'(x)=2wx^{w-1}-2wx^{2w-1} = 2wx^{w-1}(1-x^w)$. La derivada es siempre positiva en (0, 1) y sólo es igual a cero si x es cero o uno, por lo que φ_w es biyectiva en [0, 1]. ∎

Proposición 3.5.1.6:

$\text{Prod}\leq\text{Prod}\varphi_w$ para todo $w>0$.

Demostración:

Al ser $1\geq x^w$ multiplicando por el número negativo y^w-1 se tiene que $y^w-1\leq x^w(y^w-1)$, luego $0\leq 1-(y^w+x^w)+(xy)^w$. Multiplicando por $2(xy)^w$ se tiene que $0\leq 2(xy)^w-2(xy)^w(y^w+x^w)+2(xy)^{2w}$.

Por tanto $2(xy)^w-(xy)^{2w} \leq 4(xy)^w-2x^wy^{2w}-2x^{2w}y^w+(xy)^{2w} = (2x^w-x^{2w})(2y^w-y^{2w})$, luego $\varphi_w(xy) \leq \varphi_w(x)\,\varphi_w(y)$, y $\varphi_w(\text{Prod}(x, y)) \leq \text{Prod}(\varphi_w(x), \varphi_w(y))$, y como consecuencia de la proposición 3.5.1.2 se deduce que $\text{Prod}\leq\text{Prod}\varphi_w$. ∎

Ejemplo 3.5.1.3

$\text{Prod}\leq\text{Prod}_{2x-x^2}$.

Ejemplo 3.5.1.4

$\text{Prod}\leq\text{Prod}_{2x^2-x^4}$.

3.5.2. Sobre la familia de negaciones y la familia de t-conormas asociadas a una negación y una t-conorma

Las propiedades que se demuestran en este apartado serán utilizadas en el apartado siguiente.

Ver la definición de **familia de negaciones** de una negación N, N_φ y de la **familia de t-conormas** de una t-conorma S, S_φ en el apéndice 6.1.

Ejemplo 3.5.2.1:

Si $\varphi(x) = x^2$ y $N(x) = 1-x$ entonces $N_\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Corolario 3.5.2.1

$\varphi N_\varphi = N\varphi$.

Demostración:

Como $N_\varphi = \varphi^{-1}N\varphi$, se tiene que $\varphi N_\varphi = N\varphi$.

Corolario 3.5.2.2

$N_\varphi \varphi^{-1}=\varphi^{-1}N$.

Demostración:

Como $N_\varphi = \varphi^{-1}N\varphi$, se tiene que $N_\varphi \varphi^{-1}=\varphi^{-1}N$.

Proposición 3.5.2.1

$N_{\varphi-1} = \varphi N\varphi^{-1}$.

Demostración:

Como φ es una biyección, también lo es φ^{-1}. La negación $N_{\varphi-1}$ se define por

$N_{\varphi-1}(x) = (\varphi^{-1})^{-1}(N(\varphi^{-1}(x))) = \varphi(1-\varphi^{-1}(x))$.

Así pues $N_{\varphi-1} = \varphi N \varphi^{-1}$.

Corolario 3.5.2.3

$\varphi^{-1} N_{\varphi-1} = N\varphi^{-1}$.

Demostración:

Por la proposición anterior se tiene que $N_{\varphi-1} = \varphi N\varphi^{-1}$, luego $\varphi^{-1} N_{\varphi-1} = N\varphi^{-1}$.

Corolario 3.5.2.4

$N_{\varphi-1}\, \varphi = \varphi\, N$.

Demostración:

Como $N_{\varphi-1} = \varphi N\varphi^{-1}$ se tiene que $N_{\varphi-1}\, \varphi = \varphi\, N$.

Notación

Se denota $(T^{*N})_\varphi$ a la t-conorma dual de la t-norma T respecto de la negación N transformada por la biyección φ, es decir $(T^{*N})_\varphi(x, y) = \varphi^{-1}(N(T(N(\varphi(x)), N(\varphi(y)))))$.

Se denota $(T_\varphi)^{*N\varphi}$ a la t-conorma dual de la t-norma T_φ respecto de la negación N_φ, es decir, $(T_\varphi)^{*N\varphi}(x, y) = N_\varphi(\varphi^{-1}(T\{\varphi(N_\varphi(x)), \varphi(N_\varphi(y))\}))$.

Proposición 3.5.2.2

$(T^{*N})_\varphi = (T_\varphi)^{*N\varphi}$.

Demostración:

$(T^{*N})_\varphi (x, y) = \varphi^{-1}(N(T(N(\varphi(x)), N(\varphi(y))))$

$= \varphi^{-1}N(T(N\varphi(x), N\varphi(y)))$ Por corolario 3.5.2.1 ($\varphi N_\varphi = N\varphi$)

$= \varphi^{-1}N(T(\varphi N_\varphi(x), \varphi N_\varphi(y)))$ Por corolario 3.5.2.2 ($N_\varphi \varphi^{-1} = \varphi^{-1}N$)

$= N_\varphi \varphi^{-1} (T(\varphi N_\varphi(x), \varphi N_\varphi(y)))$

$= N_\varphi(\varphi^{-1}(T\{\varphi(N_\varphi(x)), \varphi(N_\varphi(y))\}))$

$= (T_\varphi)^{*N\varphi} (x, y)$. ∎

Proposición 3.5.2.3

$(T^{*N\varphi\text{-}1})_\varphi = (T_\varphi)^{*N}$.

Demostración:

$(T^{*N\varphi\text{-}1})_\varphi (x, y) = \varphi^{-1}(T^{*N\varphi\text{-}1}(\varphi(x), \varphi(y)))$

$= \varphi^{-1} (N_{\varphi\text{-}1}(T\{N_{\varphi\text{-}1}(\varphi(x)), N_{\varphi\text{-}1}(\varphi(y))\}))$

$= \varphi^{-1} N_{\varphi\text{-}1}T\{N_{\varphi\text{-}1}\varphi(x), N_{\varphi\text{-}1}\varphi(y)\}$ Por corolario 3.5.2.3

$= N\varphi^{-1}T\{N_{\varphi\text{-}1}\varphi(x), N_{\varphi\text{-}1}\varphi(y)\}$ Por corolario 3.5.2.4

$= N\varphi^{-1}(T\{\varphi N(x)), \varphi N(y)\})$

$= N\varphi^{-1}(T\{\varphi N(x)), \varphi N(y)\})$

$= (T_\varphi)^{*N} (x, y)$. ∎

Ejemplo 3.5.2.2:

Si $\varphi(x) = x^2$ y $N(x) = 1-x$, entonces $N_\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$. Si T = W entonces se comprueba que $(W^{*N})_\varphi(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Se comprueba que $(W^{*N})_\varphi(x, y)$ es igual a $(W_\varphi)^{*N\varphi}(x, y)$ pues

$(W_\varphi)^{*N\varphi}(x, y) = N_\varphi(\varphi^{-1}(T\{\varphi(N_\varphi(x)), \varphi(N_\varphi(y))\}))$

$$= \sqrt{1-\left(\sqrt{W(\varphi N_\varphi(x), \varphi N_\varphi(y)}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1-W(\varphi N_\varphi(x), \varphi N_\varphi(y)}$$

$$= \sqrt{1-W(\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2, \left(\sqrt{1-y^2}\right)^2)}$$

$$= \sqrt{1-W(1-x^2, 1-y^2)}$$

$$= \sqrt{W^{*N}(x^2, y^2)}$$

$$= \sqrt{x^2+y^2}, \text{ como era de esperar.}$$

3.5.3. *Propiedades de las $\prec$-medidas borrosas de especificidad definidas utilizando familias de t-normas, familias de negaciones y familias de t-conormas*

Notación

Una $\prec$-medida borrosa de especificidad definida mediante la cuaterna (T_1, N, S, T_3), cuando pueda haber alguna duda, se expresará por $ME(T_1, N, S, T_3)(A)$, es decir,

$$\mathbf{ME}(T_1, N, S, T_3)\mathbf{(A) = T_1(a_1, N(S_{2..d}\{T_3(a_j, w_j)\}))}.$$

Las siguientes corolarios son consecuencia inmediata de esta definición.

Corolario 3.5.3.1

Si $T_1 \leq T'_1$ entonces $ME(T_1, N, S, T_3)(A)$ es más estricta que $ME(T_1', N, S, T_3)(A)$.

Corolario 3.5.3.2

Si $T_3 \leq T'_3$ entonces $ME(T_1, N, S, T_3)(A)$ es menos estricta que $ME(T_1, N, S, T_3')(A)$.

Corolario 3.5.3.3

Si $S \leq S'$ entonces $ME(T_1, N, S, T_3)(A)$ es menos estricta que $ME(T_1, N, S', T_3)(A)$.

Corolario 3.5.3.4

Si $N \leq N'$ entonces $ME(T_1, N, S, T_3)(A)$ es más estricta que $ME(T_1, N', S, T_3)(A)$.

Proposición 3.5.3.1

$ME(T_1, N', (T^{*N})_\varphi, T_3)(A) = ME(T_1, N', (T_\varphi)^{*N_\varphi}, T_3)(A)$.

Demostración:

Es una consecuencia inmediata de la proposición 3.5.2.2 por ser $(T^{*N})_\varphi$ igual a $(T_\varphi)^{*N\varphi}$. ∎

Proposición 3.5.3.2

$ME(T_1, N', (T^{*N_{\varphi^{-1}}})_\varphi, T_3)\ (A) = ME(T_1, N', (T_\varphi)^{*N}, T_3)(A)$.

Demostración:

Es una consecuencia inmediata de la proposición 3.5.2.3, por ser $(T^{*N\varphi^{-1}})_\varphi = (T_\varphi)^{*N}$. ∎

Proposición 3.5.3.3

Si la negación N es involutiva se tiene que

$ME(T_1, N, (T^{*N_{\varphi^{-1}}})_\varphi, T_3)\ (A) = T_1(a_1, T_{\varphi\ 2..d}\{NT_3(a_j, w_j)\})$.

Demostración:

Por la proposición anterior

$$ME(T_1, N, (T^{*N_{\varphi^{-1}}})_\varphi, T_3)\ (A) = ME(T_1, N, (T_\varphi)^{*N}, T_3)(A)$$

$$= T_1(a_1, N(\ (T_\varphi)^{*N}{}_{2..d}\{T_3(a_j, w_j)\}))$$

$$= T_1(a_1, N(\ N(T_{\varphi\ 2..d}\{NT_3(a_j, w_j)\})))$$

$= T_1(a_1, T_{\varphi\ 2..d}\{NT_3(a_j, w_j)\})$. ∎

Corolario 3.5.3.5

Si para definir la $\prec$-medida borrosa de especificidad se utiliza la cuaterna $(T_1, N, S, T_{3\varphi})$ se obtiene que:

$$ME(T_1, N, S, T_{3\varphi})(A) = T_1(a_1, N(S_{2..d}\{\varphi^{-1}T_3(\varphi(a_j), \varphi(w_j))\})).$$

Ejemplo 3.5.3.1

Si N es la negación usual,

$$ME(W, N, S, T_{x^q})(A) = a_1\text{-}S_{2..d}\{\sqrt[q]{T(a_j^q, w_j^q)}\}.$$

Corolario 3.5.3.6

Si para definir la $\prec$-medida borrosa de especificidad se utiliza la cuaterna $(T_1, N, S_\varphi, T_{3\varphi})$ se obtiene que:

$$ME(T_1, N, S_\varphi, T_{3\varphi})(A) = T_1(a_1, N\varphi^{-1}S_{2..d}\{T_3(\varphi(a_j), \varphi(w_j))\}).$$

Demostración:

$$ME(T_1, N, S_\varphi, T_{3\varphi})(A) = T_1(a_1, NS_{\varphi\ 2..d}\{T_{3\ \varphi}(a_j, w_j)\})$$

$$= T_1(a_1, NS_{\varphi\ 2..d}\{\varphi^{-1}(T_3(\varphi(a_j), \varphi(w_j)))\})$$

$$= T_1(a_1, N(\varphi^{-1}(S_{2..d}(\varphi\{\varphi^{-1}(T_3(\varphi(a_j), \varphi(w_j)))\}))))$$

$$= T_1(a_1, N(\varphi^{-1}(S_{2..d}\{T_3(\varphi(a_j), \varphi(w_j))\})))$$

$= T_1(a_1, N\varphi^{-1}S_{2..d}\{T_3(\varphi(a_j), \varphi(w_j))\})$. ∎

Ejemplo 3.5.3.2

Si N es la negación usual,

$$ME(W, N, S_{x^q}, T_{x^q})(A) = a_1 - \sqrt[q]{S_{2..d}\{T(a_j^q, w_j^q)\}}.$$

Ejemplo 3.5.3.3

Si N es la negación usual,

$$ME(W, N, S_{x^2}, T_{x^2})(A) = a_1 - \sqrt[2]{S_{2..d}\{T(a_j^2, w_j^2)\}}.$$

Ejemplo 3.5.3.4

Si N es la negación usual,

$$ME(W, N, S_{\sqrt{x}}, T_{\sqrt{x}})(A) = a_1 - (S_{2..d}\{T(\sqrt{a_j}, \sqrt{w_j})\})^2.$$

Proposición 3.5.3.4

Si para definir la $\prec$-medida borrosa de especificidad se utiliza la cuaterna $(T_1, N_\varphi, S_\varphi, T_{3\varphi})$ se obtiene que:

$$ME(T_1, N_\varphi, S_\varphi, T_{3\varphi})(A) = T_1(a_1, \varphi^{-1}NS_{2..d}\{T_3(\varphi(a_j), \varphi(w_j))\}).$$

Demostración:

$$ME(T_1, N_\varphi, S_\varphi, T_{3\varphi})(A) = T_1(a_1, N_\varphi S_{\varphi\, 2..d}\{T_{3\,\varphi}(a_j, w_j)\}).$$

$$= T_1(a_1, N_\varphi S_{\varphi\, 2..d}\{\varphi^{-1}T_3(\varphi(a_j), \varphi(w_j))\})$$

$= T_1(a_1, N_\varphi\ \varphi^{-1}S_{\ 2..d}\{\varphi\varphi^{-1}T_3(\varphi(a_j), \varphi(w_j))\})$

$= T_1(a_1, N_\varphi\ \varphi^{-1}S_{\ 2..d}\{T_3(\varphi(a_j), \varphi(w_j))\})$

$= T_1(a_1, \varphi^{-1}N\varphi\varphi^{-1}S_{\ 2..d}\{T_3(\varphi(a_j), \varphi(w_j))\})$

$= T_1(a_1, \varphi^{-1}NS_{\ 2..d}\{T_3(\varphi(a_j), \varphi(w_j))\})$. ∎

Ejemplo 3.5.3.5

Si N es la negación usual,

$$ME(T_1, N_{x^q}, S_{x^q}, T_{x^q})(A) = T_1(a_1, \sqrt[q]{1-S\{T(a_j^q, w_j^q)\}}\ ).$$

Ejemplo 3.5.3.6

Si N es la negación usual,

$$ME(T_1, N_{x^2}, S_{x^2}, T_{x^2})(A) = T_1(a_1, \sqrt[2]{1-S\{T(a_j^2, w_j^2)\}}\ ).$$

Ejemplo 3.5.3.7

Si N es la negación usual,

$$ME(T_1, N_{\sqrt{x}}, S_{\sqrt{x}}, T_{\sqrt{x}})(A) = T_1(a_1, (N(S_{2..d}\{T(\sqrt{a_j}, \sqrt{w_j})\})^2\ ).$$

Proposición 3.5.3.5

Si para definir la $\prec$-medida borrosa de especificidad se utiliza la cuaterna $(T_{1\varphi}, N_\varphi, S_\varphi, T_{3\varphi})$ se obtiene que:

$$ME(T_{1\varphi}, N_\varphi, S_\varphi, T_{3\varphi})(A) = \varphi^{-1}T_1(\varphi(a_1), N\ S_{\ 2..d}\{T_3(\varphi(a_j), \varphi(w_j))\})\ .$$

Demostración:

$ME(T_{1\varphi}, N_\varphi, S_\varphi, T_{3\varphi})(A) = T_{1\ \varphi}\ (a_1, N_\varphi\ S_{\varphi\ 2..d}\{T_{3\ \varphi}\ (a_j, w_j)\})$

$$= T_{1\varphi}(a_1, N_\varphi S_{\varphi\, 2..d}\{\varphi^{-1}(T_3(\varphi(a_j), \varphi(w_j))\})$$

$$= T_{1\varphi}(a_1, N_\varphi\, \varphi^{-1}S_{2..d}\{\varphi\varphi^{-1}(T_3(\varphi(a_j), \varphi(w_j))\})$$

$$= T_{1\varphi}(a_1, N_\varphi\, \varphi^{-1}S_{2..d}\{T_3(\varphi(a_j), \varphi(w_j))\})$$

$$= T_{1\varphi}(a_1, \varphi^{-1}N\, \varphi\varphi^{-1}S_{2..d}\{T_3(\varphi(a_j), \varphi(w_j))\})$$

$$= T_{1\varphi}(a_1, \varphi^{-1}N\, S_{2..d}\{T_3(\varphi(a_j), \varphi(w_j))\})$$

$$= \varphi^{-1}T_1(\varphi(a_1), \varphi\varphi^{-1}N\, S_{2..d}\{T_3(\varphi(a_j), \varphi(w_j))\})$$

$$= \varphi^{-1}T_1(\varphi(a_1), N\, S_{2..d}\{T_3(\varphi(a_j), \varphi(w_j))\})\ . \blacksquare$$

Se observa como la función φ sólo aparece al principio y al final de la expresión. En el caso en que la negación sea de la familia de la negación usual se tiene:

$$ME(T_{1\varphi}, N_\varphi, S_\varphi, T_{3\varphi})\ (A) = \varphi^{-1}T_1(\varphi(a_1), 1\text{-}S_{2..d}\{T_3(\varphi(a_j), \varphi(w_j))\}).$$

Ejemplo 3.5.3.8

$$ME(T_{1x^2}, N_{x^2}, S_{x^2}, T_{3x^2})(A) = \sqrt{T_1(a_1^2, N\, S_{2..d}\{T(a_j^2,\ w_j^2)\}}\ .$$

Ejemplo 3.5.3.9

Si T_1 es el producto y N la negación usual,

$$ME(Prod_{x^2}, N_{x^2}, S_{x^2}, T_{x^2})(A) = \sqrt{a_1^2(1\text{-}S_{2..d}\left\{T(a_j^2,\ w_j^2)\right\})}$$

$$= a_1\sqrt{1\text{-}S_{2..d}\left\{T(a_j^2,\ w_j^2)\right\}}\ .$$

Corolario 3.5.3.7

Si $\varphi(x)=x^q$, $q\in Q$, $q>0$ entonces la $\prec$-medida borrosa de especificidad definida por la cuaterna ($T_{1\varphi}$, N_φ, S_φ, Prod $_\varphi$) coincide con la $\prec$-medida borrosa de especificidad definida por la cuaterna ($T_{1\varphi}$, N_φ, S_φ, Prod).

La demostración es una consecuencia inmediata por la proposición 3.5.1.4 por ser φ un automorfismo de ([0, 1], Prod). ∎

Proposición 3.5.3.6

Si la suma se pesos es menor o igual a uno, entonces la $\prec$-medida borrosa de especificidad definida por la cuaterna $(W_{x^q}, N_{x^q}, W^*_{x^q}, T_{x^q})$ es:

$$\mathrm{ME}(W_{x^q}, N_{x^q}, W^*_{x^q}, T_{x^q})\ (A) = \sqrt[q]{a_1^q - \sum_{j=2}^{d} a_j^q w_j^q}\ .$$

Demostración:

En efecto, si $\varphi(x) = x^q$,

$$\mathrm{ME}(W_{x^q}, N_{x^q}, W^*_{x^q}, T_{x^q})(A) = \varphi^{-1}W(\varphi(a_1),\ 1-W^*_{2..d}\{T_3(\varphi(a_j),\ \varphi(w_j))\})$$

$$= \sqrt[q]{Máx\left\{0,\ \ a_1^q + (1-\mathrm{Min}\left\{1,\ \sum_{j=2}^{d} a_j^q.w_j^q\right\}) - 1\right\}}$$

$$= \sqrt[q]{a_1^q - \sum_{j=2}^{d} a_j^q.w_j^q}\ .$$

Ya que al ser $\sum_{j=2}^{d} w_j \leq 1$, se tiene que $\sum_{j=2}^{d} w_j^q \leq \sum_{j=2}^{d} w_j \leq 1$, por lo que $\sum_{j=2}^{d} a_j^q w_j^q \leq \sum_{j=2}^{d} a_2^q.w_j^q \leq\ a_2^q.\sum_{j=2}^{d} w_j^q \leq\ a_2^q.1 \leq 1$, luego $Mín\left\{1,\ \sum_{j=2}^{d} a_j^q.w_j^q\right\} = \sum_{j=2}^{d} a_j^q w_j^q$. Por otra parte al ser $\sum_{j=2}^{d} a_j^q w_j^q \leq \sum_{j=2}^{d} a_1^q . w_j \leq\ a_1^q . \sum_{j=2}^{d} w_j^q \leq\ a_1^q$ tenemos que Máx{0, a_1^q $-\sum_{j=2}^{d} a_j^q w_j^q$ } = $a_1^q - \sum_{j=2}^{d} a_j^q w_j^q$.∎

Ejemplo 3.5.3.10

Si φ(x) = 2x–x² y N(x) = 1–x, entonces $\varphi^{-1}(x) = 1-\sqrt{1-x}$, por lo que

$$\mathrm{ME}(\mathrm{W}_{\varphi}, \mathrm{N}_{\varphi}, \mathrm{W}^*_{\varphi}, \mathrm{Prod}_{\varphi})(\mathrm{A}) = 1-\sqrt{1-(\ (2a_1 - a_1^2) - \sum_{j=2}^{d} (2a_j - a_j^2)(2w_j - w_j^2)}\ .$$

Ejemplo 3.5.3.11

Si φ(x) = 2x–x² y N(x) = 1–x, entonces

$$\mathrm{ME}(\mathrm{Prod}_{\varphi}, \mathrm{N}, \mathrm{W}^*, \mathrm{Prod})(\mathrm{A}) = 1-\sqrt{1-(2a_1 - a_1^2).[2(1-(\sum_{2}^{d} a_j w_j)) - (1-(\sum_{2}^{d} a_j w_j))^2]}\ .$$

Proposición 3.5.3.7

Si φ(x) = 2x–x² y N(x)=1–x, entonces $\mathrm{ME}(\mathrm{Prod}_{\varphi}, \mathrm{N}, \mathrm{W}^*, \mathrm{Prod})$ es más estricta que $\mathrm{ME}(\mathrm{Prod}, \mathrm{N}, \mathrm{W}^*, \mathrm{Prod})(\mathrm{A}) = a_1 - \sum_{j=2}^{d} a_j w_j$.

Demostración:

Al ser Prod ≤ $\mathrm{Prod}_{2x\text{-}x^2}$ por la proposición 3.5.3.1 se tiene que $\mathrm{ME}(\mathrm{Prod}_{\varphi}, \mathrm{N}, \mathrm{W}^*, \mathrm{Prod})$ es más estricta que $\mathrm{ME}(\mathrm{Prod}, \mathrm{N}, \mathrm{W}^*, \mathrm{Prod})(\mathrm{A})$. ∎

3.6. $\prec$-MEDIDA BORROSA DE ESPECIFICIDAD SOBRE UNIVERSOS INFINITOS

El objetivo de este apartado es definir una medida borrosa de especificidad cuando el universo X sobre el que trabajamos tiene infinitos elementos. Se pretende que verifique las propiedades que definen las $\prec$-medidas borrosas, y las propiedades que caracterizan a las medidas de especificidad. Se pretende también que generalicen a las $\prec$-medidas borrosas de especificidad definidas para universos finitos. Se proponen distintos ejemplos. Comienza analizando el trabajo de Yager [Yager; 1998] para las medidas de especificidad en universos continuos.

3.6.1 Especificidad en dominios continuos.

Yager [Yager; 1998] propone medidas de especificidad útiles para dominios continuos.

Supone que X es un dominio continuo, por ejemplo un intervalo real. Sea A un conjunto borroso sobre X y sea A_α su subconjunto de nivel α.

Recuerda la siguiente definición:

Definición 3.6.1:

Una **medida borrosa** M [Nguyen-Walker; 1996] (o $\subseteq$–medida borrosa) es una función $M:\{0, 1\}^X \rightarrow [0, 1]$ que verifica las siguientes propiedades:

1) $M(\emptyset) = 0$

2) $M(X) = 1$

3) Si $A \subset B$ entonces $M(A) \leq M(B)$

Se observa que se define sobre subconjuntos clásicos.

Considera sólo medidas borrosas según [Nguyen-Walker; 1996] para las cuales M(B) = 0 si y sólo si B es el conjunto vacío o un conjunto clásico de un único elemento.

Definición 3.6.2:

Define [Yager; 1998] una **medida de especificidad en dominios continuos** como:

$$Sp(A) = \int_0^{\alpha_{max}} F(M(A_\alpha))\, d\alpha$$

donde α_{max} es el máximo grado de pertenencia en A y F es una función definida de $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ con las siguientes propiedades:

1) $F(0)=1$

2) $F(1)=0$

3) $F(x) \leq F(y) \leq 0$ si $x>y$.[1]

Comprueba que esta definición satisface las propiedades que definen una medida de especificidad.

En efecto $Sp(\varnothing)=0$ pues α_{max} es cero.

[1] Esta propiedad debe ser: Si $x>y$ entonces $0 \leq F(x) \leq F(y) \leq 1$.

Estudia bajo que condiciones la medida de especificidad de un conjunto borroso es uno. Para que $Sp(A) = \int_0^{\alpha_{max}} F(M(A_\alpha))d\alpha = 1$ se requiere que $M(A_\alpha)$ sea igual a cero para todo α y que α_{max} sea 1, por lo que, con las condiciones impuestas a la medida M, (M(B) = 0 si y sólo si B es el conjunto vacío o un conjunto clásico de un único elemento) A debe ser un conjunto clásico de un único elemento.

Si el máximo valor de pertenencia aumenta, entonces también Sp aumenta. Si el máximo valor de pertenencia disminuye entonces Sp disminuye.

Yager [Yager; 1998] presenta el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Sea X = [0, 1] y M una medida (medida de *Lebesgue-Stieltjes*) sobre intervalos definida como M([a, b])=b–a. Supone que F se ha definido como F(z) = 1 – z. Sea A un conjunto borroso, que representa una distribución de posibilidad, definido como:

$$A(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 0.5 \\ -2x+2 & 0.5 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Gráficamente, el conjunto borroso A se representa de la siguiente manera:

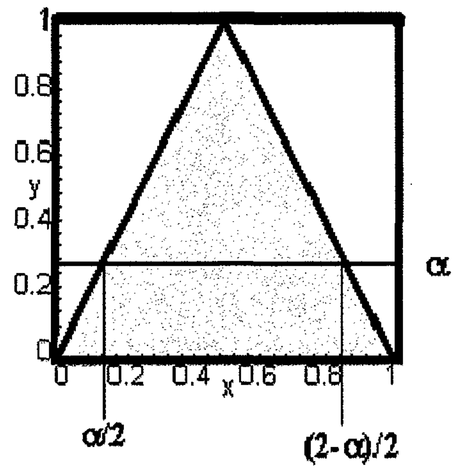


Fig 1: Conjunto borroso $A(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 0.5 \\ -2x+2 & 0.5 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Para cualquier α, $A_\alpha = [\alpha/2, (2-\alpha)/2]$ y $M(A_\alpha) = (2-\alpha)/2-\alpha/2 = 1-\alpha$. Como $\alpha_{max}=1$ entonces:

$$Sp(A) = \int_0^1 F(M(A_\alpha))d\alpha = \int_0^1 1-(1-\alpha)\, d\alpha = 0.5$$

Reflexiona que se puede obtener una forma muy peculiar de medida de especificidad con dominios continuos. Sea X el intervalo real [a, b] y sea $F(z)=1-z$. En este caso:

$$Sp(A) = \int_0^{\alpha_{max}} F(M(A_\alpha))d\alpha = \int_0^{\alpha_{max}} (1-M(A_\alpha))d\alpha = \alpha_{max} - \int_0^{\alpha_{max}} M(A_\alpha)d\alpha \qquad (1)$$

Utiliza como medida M la medida de Lebesgue dada por la longitud del segmento normalizada, $M(B) = \text{Longitud}(B)/(b-a)$.

Representando $Sp(A) = \alpha_{max} - \int_0^{\alpha_{max}} M(A_\alpha)\, d\alpha$ y $A_\alpha = \bigcup_{i=1}^{q\alpha} A_{\alpha i}$ donde $A_{\alpha i}=[a_{\alpha i}, b_{\alpha i}]$, y $Long(A_{\alpha i})=b_{\alpha i}-a_{\alpha i}$, entonces $M(A_\alpha)=\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{q} Long(A_{\alpha i})$ y

$$Sp(A) = \alpha_{max} - \frac{1}{b-a}\int_0^{\alpha_{max}} Long(A_{\alpha i})\, d\alpha$$

Observa que la expresión $\int_0^{\alpha_{max}} Long(A_{\alpha i})d\alpha$ puede verse como el área bajo el conjunto borroso A. De esta forma la especificidad de un conjunto borroso sobre un dominio continuo puede verse como $\alpha_{max} - \frac{\text{área bajo A}}{\text{b - a}}$. Y al ser $\frac{\text{área bajo A}}{\text{b - a}}$ la media de la función de pertenencia del conjunto borroso A, la medida de especificidad de un conjunto borroso en un dominio continuo puede formularse de forma sencilla y útil como la diferencia entre el mayor valor de pertenencia de A y la media de sus valores de pertenencia.

Reflexiona que al dividir el área entre la longitud del intervalo b–a, al modificar ésta puede cambiar la medida de especificidad aunque el área bajo el conjunto no varíe.

Observación:

Se observa que el ejemplo de medida de especificidad que contempla contempla *Yager* no verifica necesariamente el primer axioma de medida de especificidad [R. R. Yager; 1990], ya que la medida M utilizada, la longitud del segmento, o la longitud normalizada del segmento, no verifica la propiedad impuesta de ser 0 si y sólo si el conjunto es el vacío o tiene un único elemento. Por tanto no verifica que la especificidad de un conjunto borroso vale uno si y sólo si dicho conjunto es un conjunto clásico unitario. También valdría uno para un conjunto clásico con dos elementos, o con n elementos.

Las siguientes definiciones y resultados son originales de esta memoria de doctorado:

3.6.2. $\prec$-Medida borrosa de especificidad sobre universos infinitos

En este apartado se define y analiza una $\prec$-medida borrosa de especificidad sobre conjuntos referenciales continuos mediante una expresión en la que se utilizan t-normas y negaciones.

Sea X un universo continuo. Sea A un subconjunto borroso de dicho universo cuyo máximo valor de pertenencia sea α_{max} y sea A_α su subconjunto de nivel α. Sean T_1 y T_2 dos t-normas y N una negación. Sea M una medida borrosa según [Nguyen-Walker; 1996].

Definición 3.6.2.1:

Se define la **$\prec$-medida borrosa de especificidad** de un subconjunto borroso A sobre un conjunto referencial infinito por:

$$\mathbf{ME(A) = T_1(\alpha_{max}, N(\int_0^{\alpha_{max}} T_2(M(A_\alpha), d\alpha)))}$$

donde la integral es una integral de *Choquet*.

Ejemplo 3.6.2.1:

Si T_2 es la t-norma producto, N la negación N(x)=1−x, T_1 es la t-norma de Łukasiewicz $T_1(x, y) = \text{máx}(0, x+y-1)$, M es la medida de *Lebesgue* dada por la longitud, estamos en el ejemplo (1) propuesto por *Yager*.

En efecto $ME(A) = \text{máx}\ (0, \alpha_{\max} + N(\int_0^{\alpha_{max}} M(A_\alpha).d\alpha) - 1)$

$$= \text{máx}(0, \alpha_{\max}+1- \int_0^{\alpha_{max}} M(A_\alpha).d\alpha-1)$$

$$= \text{máx}(0, \alpha_{\max}- \int_0^{\alpha_{max}} M(A_\alpha).d\alpha)$$

$$\mathbf{= \alpha_{\max} - \int_0^{\alpha_{max}} M(A_\alpha).d\alpha}$$

(pues $M(A_\alpha)$ es siempre menor o igual a uno) y obtenemos la expresión (1).

Relación con el caso discreto:

Esta forma de definir una $\prec$-medida borrosa de especificidad generaliza la expresión discreta si se considera que una t-conorma generalizada puede expresarse por una integral de *Choquet*, y los pesos vienen dados en función de la medida borrosa de los subconjuntos de nivel.

Observación:

Se observa que *Yager* introduce la negación, a la que nombra F, dentro del signo integral. Al utilizar en los ejemplos una función lineal como la negación N el resultado es el mismo que en este caso. Sin embargo si se utiliza otra negación el resultado es distinto.

Teorema 3.6.2.1:

ME es una $\prec$-medida borrosa de especificidad.

Demostración:

1. $ME(\varnothing) = T_1(0, N(\int_0^0 T_2(0, d\alpha))) = 0$

2. $ME(\{x\}) = T_1(1, N(\int_0^1 T_2(M(A_\alpha), d\alpha))) = N(\int_0^1 T_2(0, d\alpha)) = N(0) = 1$

3. Si A y B son subconjuntos difusos normales y $A \subseteq B$ entonces $ME(A) \geq ME(B)$. En efecto si $A \subseteq B$ entonces $M(A_\alpha) \leq M(B_\alpha)$ para todo α luego $T_2(M(A_\alpha), d\alpha)) \leq T_2(M(B_\alpha), d\alpha))$:

$$\begin{aligned} ME(A) &= T_1(1, N(\int_0^1 T_2(M(A_\alpha), d\alpha))) \\ &= N(\int_0^1 T_2(M(A_\alpha), d\alpha)) \\ &\geq N(\int_0^1 T_2(M(B_\alpha), d\alpha)) \\ &= T_1(1, N(\int_0^1 T_2(M(B_\alpha), d\alpha))) = ME(B). \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 3.6.2.2:

Si la medida borrosa M verifica que M(B) = 0 si y sólo si B es el conjunto vacío o un conjunto clásico de un único elemento, N es una negación fuerte y T_2 es una t-norma positiva entonces la $\prec$-medida borrosa de especificidad es una medida de especificidad según *Yager*.

Demostración:

Si imponemos a la medida borrosa M, como hace *Yager*, que M(B) = 0 si y sólo si B es el conjunto vacío o un conjunto clásico de un único elemento tenemos que ME(A)=1 si y sólo si A es un conjunto clásico con un único elemento bajo algunas condiciones impuestas a la negación y la t-norma T_2. En efecto si

$ME(A) = 1 = T_1(\alpha_{max}, N(\int_0^{\alpha_{max}} T_2(M(A_\alpha), d\alpha)))$ debe ser $\alpha_{max}=1$ y $N(\int_0^{\alpha_{max}} T_2(M(A_\alpha), d\alpha))=1$, luego la negación debe verificar que N(x)=1 si y sólo si x=0. Entonces $\int_0^{\alpha_{max}} T_2(M(A_\alpha), d\alpha)=0$, luego T_2 debe ser una t-norma positiva, y M debe verificar la propiedad impuesta por *Yager*. ∎

Propiedad 3.6.2.1:

Si A es un conjunto clásico entonces $ME(A)= N(\int_0^1 T_2(M(A_\alpha), d\alpha))$

Demostración:

En efecto $ME(A) = T_1(\alpha_{max}, N(\int_0^{\alpha_{max}} T_2(M(A_\alpha), d\alpha)))$

$$= T_1(1, N(\int_0^1 T_2(M(A_\alpha), d\alpha)))$$

$$= N(\int_0^1 T_2(M(A_\alpha), d\alpha)).$$ ∎

Propiedad 3.6.2.2:

Si A y B son dos conjuntos clásicos y $M(A) \geq M(B)$ entonces $ME(A) \leq ME(B)$

La demostración es consecuencia inmediata de la propiedad anterior.

Observación:

ME es una $\prec$-medida borrosa.

En el conjunto de los subconjuntos borrosos de un universo dado tenemos un preorden dado por la cualidad de ser más o menos específico. Dicha cualidad es la que se pretende medir.

Propiedad 3.6.2.4:

ME es una $\prec$-medida borrosa de especificidad regular

Demostración:

$$ME(X) = T_1(1, N(\int_0^1 T_2(M(X), d\alpha))) = N(\int_0^1 T_2(1, d\alpha)) = N(1) = 0. \blacksquare$$

Definición 3.6.2.2:

Se dice que una $\prec$-medida borrosa de especificidad ME es **más estricta** que ME* si para todo subconjunto borroso A verifica que $ME(A) \leq ME^*(A)$.

3.6.3. Ejemplos

Ya se ha estudiado el ejemplo que se obtiene si la integral es una integral de *Lebesgue*, la medida M es la medida de *Lebesgue*, la negación es N(x)=1–x, la t-norma T_1 es la t-norma de Łukasiewicz y T_2 es la t-norma del producto. Se comprueba que generaliza el ejemplo de medida de especificidad estudiado por *Yager*, y la medida de especificidad lineal del caso discreto.

Ejemplo 3.6.3.1:

Sea N(x)=1–x, T_1=W, T=Prod, luego

$$\mathrm{ME(A)} = \alpha_{\mathbf{max}} - \int_0^{\alpha_{max}} \mathbf{M(A_\alpha).d\alpha}$$

Se calcula la $\prec$-medida borrosa de especificidad del conjunto borroso:

$$\mathrm{B(x)} = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 0.25 \\ 4x-1 & 0.25 \le x \le 0.5 \\ -4x+3 & 0.5 \le x \le 0.75 \\ 0 & 0.75 \le x \le 1 \end{cases}$$

Gráficamente, el conjunto borroso B se representa de la siguiente manera:

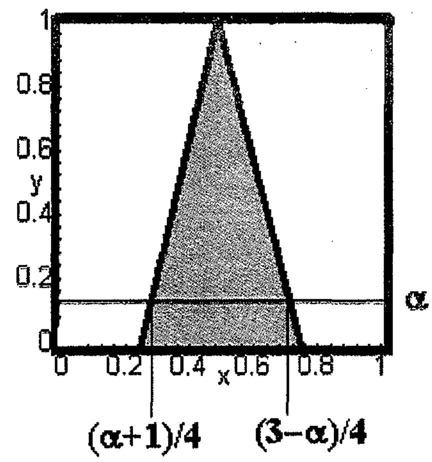


Fig 2: Conjunto borroso $B(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 0.25 \\ 4x-1 & 0.25 \le x \le 0.5 \\ -4x+3 & 0.5 \le x \le 0.75 \\ 0 & 0.75 \le x \le 1 \end{cases}$

Para cualquier α, $B_\alpha = [(\alpha+1)/4, (3-\alpha)/4]$ y $M(B_\alpha) = \frac{3-\alpha}{4} - \frac{\alpha+1}{4} = \frac{1-\alpha}{2}$. Como $\alpha_{max}=1$ entonces:

$$ME(B) = 1- \int_0^1 M(B_\alpha)d\alpha = 1- \int_0^{\alpha_{max}} \frac{1-\alpha}{2} d\alpha = 1- \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Se calcula la $\prec$-medida borrosa de especificidad del conjunto borroso:

$$C(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 0.5 \\ 1-x & 0.5 \le x \le 1 \end{cases}$$

Gráficamente, el conjunto borroso C se representa de la siguiente manera:

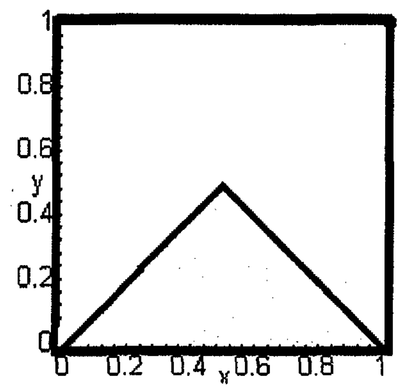


Fig 3: Conjunto borroso $C(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 0.5 \\ 1-x & 0.5 \le x \le 1 \end{cases}$

Para cualquier α, $C_\alpha = [\alpha, 1-\alpha]$ y $M(C_\alpha) = 1-\alpha-\alpha = 1-2\alpha$ para α menor o igual a 0.5, y cero para α mayor que 0.5. Como $\alpha_{max}=0.5$ entonces:

$$ME(C) = \frac{1}{2} - \int_0^{0.5} M(C_\alpha)d\alpha = \frac{1}{2} - \int_0^{0.5} (1-2\alpha).d\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Se calcula la $\prec$-medida borrosa de especificidad del conjunto borroso:

$$D(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 0.25 \\ 2x - 1/2 & 0.25 \le x \le 0.5 \\ 3/2 - 2x & 0.5 \le x \le 0.75 \\ 0 & 0.75 \le x \le 1 \end{cases}$$

Gráficamente, el conjunto borroso D se representa de la siguiente manera:

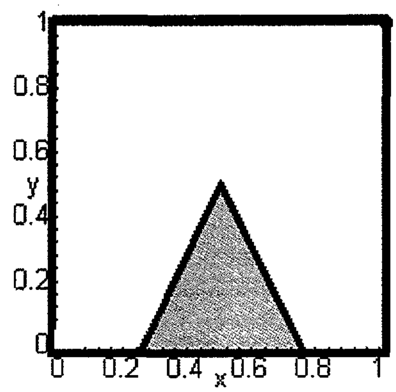


Fig 4: Conjunto borroso D(x) = $\begin{cases} 0 & 0 \le x \le 0.25 \\ 2x-1/2 & 0.25 \le x \le 0.5 \\ 3/2-2x & 0.5 \le x \le 0.75 \\ 0 & 0.75 \le x \le 1 \end{cases}$

Para cualquier α, $D_\alpha = [\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2}, \frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}]$ y $M(D_\alpha) = \frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}-\alpha$ para α menor o igual a 0.5, y cero para α mayor que 0.5. Como α_{max}=0.5 entonces:

$$ME(D) = \frac{1}{2} - \int_0^{0.5} M(D_\alpha)d\alpha = \frac{1}{2} - \int_0^{0.5} (\frac{1}{2}-\alpha).d\alpha = \frac{1}{2} - (\frac{1}{4}-\frac{1}{8}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = 3/8.$$

Se calcula la $\prec$-medida borrosa de especificidad del conjunto borroso:

$$E(x) = \begin{cases} 4x & 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4} \\ 4-4x & \frac{3}{4} \le x \le 1 \end{cases}$$

Gráficamente, el conjunto borroso E se representa de la siguiente manera:

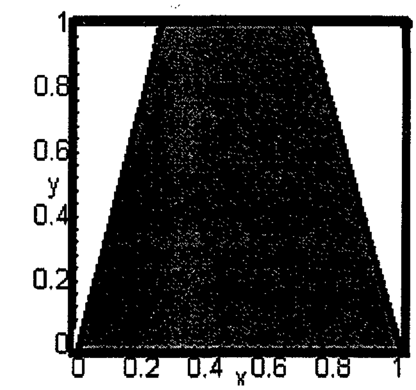


Fig 5: Conjunto borroso E(x) = $\begin{cases} 4x & 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4} \\ 4-4x & \frac{3}{4} \le x \le 1 \end{cases}$

Para cualquier α, $E_\alpha = [\alpha/4,\ 1-\alpha/4]$ y $M(E_\alpha) = 1-\alpha/4-\alpha/4 = \frac{1-\alpha}{2}$ para todo α. Como $\alpha_{max}=1$ entonces:

$$ME(E) = 1-\int_0^1 M(E_\alpha)d\alpha = 1-\int_0^1 (1-\frac{\alpha}{2}).d\alpha = 1-(1-\frac{1}{4}) = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Se observa que los conjuntos borrosos A, B y E son normales con $B \subset A \subset E$, y que C y D no lo son, con $D \subset C$. Su $\prec$-medida borrosa de especificidad de este ejemplo 1 verifican la siguiente relación:

$$ME(B) > ME(A) > ME(D) > ME(C) = ME(E)$$

Ejemplo 3.6.3.2:

Sea N(x)=1–x, $T_1 = T_2$ = Prod, luego ME(A) = $\alpha_{\mathbf{max}} - \alpha_{\mathbf{max}} \int_0^{\alpha_{max}} \mathbf{M(A_\alpha).d\alpha}$

Se calcula esta $\prec$-medida borrosa de especificidad para los conjuntos borrosos anteriores:

$$A(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 0.5 \\ -2x+2 & 0.5 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para cualquier α, $A_\alpha = [\frac{\alpha}{2}, \frac{2-\alpha}{2}]$ y $M(A_\alpha) = \frac{2-\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1-\alpha$. Como $\alpha_{max}=1$ entonces:

$$ME(A) = 1-1.\int_0^1 M(A_\alpha)d\alpha = 1-1.\int_0^1 1-(1-\alpha)\,d\alpha = 1-1.(1-\frac{1}{2}) = 0.5$$

$$B(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 0.25 \\ 4x-1 & 0.25 \le x \le 0.5 \\ -4x+3 & 0.5 \le x \le 0.75 \\ 0 & 0.75 \le x \le 1 \end{cases}$$

Para cualquier α, $B_\alpha = [(\alpha+1)/4, (3-\alpha)/4]$ y $M(B_\alpha) = (3-\alpha)/4-(\alpha+1)/4 = \frac{1-\alpha}{2}$. Como $\alpha_{max}=1$ entonces:

$$ME(B) = 1-\ 1.\int_0^1 M(B_\alpha)d\alpha = 1-\ 1.\int_0^1 \frac{1-\alpha}{2}\,.\,d\alpha = 1-(\frac{1}{2})((1-\frac{1}{2})$$

$$= 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Se calcula esta $\prec$-medida borrosa de especificidad del conjunto borroso:

$$C(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 0.5 \\ 1-x & 0.5 \le x \le 1 \end{cases}$$

Para cualquier α, $C_\alpha = [\alpha, 1-\alpha]$ y $M(C_\alpha) = 1-\alpha-\alpha = 1-2\alpha$ para α menor o igual a 0.5, y cero para α mayor que 0.5. Como $\alpha_{max}=0.5$ entonces:

$$ME(C) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{0.5} M(C_\alpha)d\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{0.5} (1-2\alpha).d\alpha$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Se calcula esta $\prec$-medida borrosa de especificidad del conjunto borroso:

$$D(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 0.25 \\ 2x-1/2 & 0.25 \le x \le 0.5 \\ 3/2-2x & 0.5 \le x \le 0.75 \\ 0 & 0.75 \le x \le 1 \end{cases}$$

Para cualquier α, $D_\alpha = [\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2}, \frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}]$ y $M(D_\alpha) = \frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}-\alpha$ para α menor o igual a 0.5, y cero para α mayor que 0.5. Como $\alpha_{max}=0.5$ entonces:

$$ME(D) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{0.5} M(D_\alpha)d\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{0.5} \left(\frac{1}{2}-\alpha\right).d\alpha$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2} - 1/16 = 7/16.$$

Se calcula esta $\prec$-medida borrosa de especificidad del conjunto borroso:

$$E(x) = \begin{cases} 4x & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 4-4x & \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Para cualquier α, $E_\alpha = [\alpha/4,\ 1-\alpha/4]$ y $M(E_\alpha) = 1-\alpha/4-\alpha/4 = 1-\frac{\alpha}{2}$ para todo α. Como $\alpha_{max}=1$ entonces:

$$ME(E) = 1- 1.\int_0^1 M(E_\alpha)d\alpha = 1-1.\int_0^1 (1-\frac{\alpha}{2}).d\alpha = 1- 1.(1-\frac{1}{4})$$

$$= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Se observa que los conjuntos borrosos A, B y E son normales con $B\subset A\subset E$, por lo que esta medida coincide con la anterior. C y D no lo son, con $D\subset C$. Su $\prec$-medida borrosa de especificidad de este ejemplo 2 tienen la siguiente relación:

$$ME(B) > ME(A) > ME(D) > ME(C) > ME(E).$$

Como Prod $\geq$ W, entonces la medida de especificidad definida con el producto es menos estricta que la definida mediante la t-norma de Łukasiewicz. En efecto 6/16>4/16 y 7/16>6/16.

3.6.4. Otras expresiones de $\prec$-medidas borrosas de especificidad utilizando familias de t-normas y de negaciones

En este apartado se presentan numerosos ejemplos de $\prec$-medidas borrosas de especificidad y se ofrecen el desarrollo de los cálculos de dichas medidas, no porque sean complejos sino por su originalidad.

Los diferentes ejemplos se tomarán sobre 5 diferentes conjuntos borrosos A, B, C, D y E definidos sobre el intervalo [0, 1] para mostrar como varían las $\prec$-medidas borrosas de especificidad según las diferentes familias de t-normas y negaciones que se consideren.

En el apartado 3.6.4.1 se desarrollan ejemplos de $\prec$-medidas borrosas de especificidad sobre las familias de (W, N, Prod), que se resumen en la tabla 3.6.4.1 En el apartado 3.6.4.2 se desarrollan ejemplos sobre las familias de (Prod, N, Prod), que se resumen en la tabla 3.6.4.2 y en el apartado 3.6.4.3 se desarrollan ejemplos sobre las familias (Min, N, Prod), que se resumen en la tabla 3.6.4.3. Finalmente se ofrece una visión general de todos estos resultados en la tabla 3.6.4.4, que permite obtener unas conclusiones y visualizar rápidamente la influencia de las distintas t-normas y negaciones utilizadas en la definición de $\prec$-medidas borrosas de especificidad. También puede servir para decidir que $\prec$-medida borrosa de especificidad puede ser adecuada en un determinado contexto.

Se estudian distintas expresiones de $\prec$-medidas borrosas de especificidad sobre universos infinitos obtenidas al sustituir una t-norma por otra de la familia definida mediante una biyección φ, permitiendo ofrecer un método más para generar gran cantidad de $\prec$-medidas borrosas de especificidad diferentes.

Si se sustituye la t-norma T_1 por una t-norma $T_{1\varphi}$ de la familia definida mediante la biyección φ, es decir, si $T_\varphi(a, b) = \varphi^{-1}T(\varphi(a), \varphi(b))$, entonces se tiene que:

$$ME(T_{1\varphi}, N, T_2)(A) = \varphi^{-1}\, T_1\, (\varphi(\alpha_{max}), \varphi(\, N(\int_0^{\alpha_{max}} T_2(M(A_\alpha), d\alpha))))$$

Si se sustituye la negación N por la negación N_φ de la familia definida mediante la biyección φ se tiene:

$$ME(T_1, N_\varphi, T_2)(A) = T_1\, (\alpha_{max}, \varphi^{-1}N\varphi(\int_0^{\alpha_{max}} T_2(M(A_\alpha), d\alpha)))$$

Si se sustituye la t-norma T_1 por una t-norma $T_{1\varphi}$ y la negación N por la negación N_φ de las familias definidas mediante la biyección φ se tiene:

$$ME(T_{1\varphi}, N_\varphi, T_2)(A) = \varphi^{-1}\, T_1\, (\varphi(\alpha_{max}), \varphi\varphi^{-1}N\varphi(\int_0^{\alpha_{max}} T_2(M(A_\alpha), d\alpha)))$$

$$= \varphi^{-1}\, T_1\, (\varphi(\alpha_{max}), N\varphi(\int_0^{\alpha_{max}} T_2(M(A_\alpha), d\alpha)))$$

Proposición 3.6.4.1:

Si $\varphi(x) = x^q$, con $q>1$ entonces $ME(T_1, N_\varphi, T_2) \geq ME(T_1, N, T_2)$.

Demostración

Si $\varphi(x) = x^q$, con $q>1$, $0 \leq x \leq 1$, entonces $x^q \leq x$, luego $1-x^q \geq 1-x$ y por tanto $(1-x^q)^{1/q} \geq 1-x$, por lo que $N_\varphi \geq N$ y por la monotonía de T_1 se tiene que $ME(T_1, N_\varphi, T_2) \geq ME(T_1, N, T_2)$. ∎

Proposición 3.6.4.2:

Si $\psi(x) = x^p$, con $p<1$ entonces $ME(T_1, N_\psi, T_2) \leq ME(T_1, N, T_2)$.

Demostración

Si $\psi(x) = x^p$, con $p<1$, $0\leq x\leq 1$, entonces $x \leq x^p$, luego $1-x \geq 1-x^p$ y por tanto $1-x \geq (1-x^p)^{1/p}$, por lo que $N_\psi \leq N$ y por la monotonía de T_1 se tiene que $ME(T_1, N_\psi, T_2) \leq ME(T_1, N, T_2)$. ∎

EJEMPLO 3.6.4.1: Medidas sobre las familias de (W, N, Prod)

Si T_1 es la t-norma de Łukasiewicz W, T_2 es la t-norma producto, N la negación usual $N(x)=1-x$, M es la medida de Lebesgue dada por la longitud, $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = \sqrt{x}$ entonces

$$W_\varphi(x, y) = \sqrt[2]{máx(0, x^2 + y^2 - 1)};$$

$$N_\varphi(x) = \sqrt[2]{1-x^2},$$

$$W_\psi(x, y) = (máx\{0, \sqrt{x} + \sqrt{y} - 1)^2,$$

$N_\psi(x) = (1-\sqrt{x})^2$, luego:

$$ME(W, N_\varphi, Prod)(A) = máx\left(0, \alpha_{max} + \sqrt[2]{1 - \left(\int_0^{\alpha_{max}} M(A_\alpha).d\alpha\right)^2} - 1\right)$$

$$= \alpha_{max} + \sqrt[2]{1 - \left(\int_0^{\alpha_{max}} M(A_\alpha).d\alpha\right)^2} - 1$$

$$\mathrm{ME}(\mathrm{W}, \mathrm{N}_{\psi}, \mathrm{Prod})(\mathrm{A}) = \text{máx}\ (0,\ \alpha_{\max} + \left(1-\sqrt[2]{\int_0^{\alpha_{\max}} \mathrm{M}(\mathrm{A}_\alpha).d\alpha}\ \right)^2 - 1)$$

$$= \text{máx}\ (0,\ \alpha_{\max} + 1 + \int_0^{\alpha_{max}} M(A_\alpha).d\alpha - 2\sqrt[2]{\int_0^{\alpha_{max}} M(A_\alpha).d\alpha}\ - 1)$$

$$= \text{máx}\ (0,\ \alpha_{\max} + \int_0^{\alpha_{max}} M(A_\alpha).d\alpha - 2\sqrt[2]{\int_0^{\alpha_{max}} M(A_\alpha).d\alpha}\ ).$$

$$\mathrm{ME}(\mathrm{W}_{\varphi}, \mathrm{N}, \mathrm{Prod})(\mathrm{A}) = \varphi^{-1}\ \mathrm{T}_1\ (\varphi(\alpha_{\max}),\ \varphi(\ \mathrm{N}(\ \int_0^{\alpha_{max}} \mathrm{T}_2(\mathrm{M}(\mathrm{A}_\alpha),\ d\alpha))))$$

$$= \sqrt{\text{máx}\ (0,\ \alpha_{\max}^2 + \left(1 - \int_0^{\alpha_{\max}} \mathrm{M}(\mathrm{A}_\alpha) d\alpha\right)^2 - 1)}\,.$$

$$\mathrm{ME}(\mathrm{W}_{\psi}, \mathrm{N}, \mathrm{Prod})\ (\mathrm{A}) = \left(\text{máx}\ (0,\ \sqrt{\alpha_{\max}} + \sqrt{1 - \int_0^{\alpha_{\max}} \mathrm{M}(\mathrm{A}_\alpha) d\alpha} - 1)\right)^2.$$

$$\mathrm{ME}(\mathrm{W}_{\varphi}, \mathrm{N}_{\varphi}, \mathrm{Prod})(\mathrm{A}) = \sqrt{\text{máx}\ (0,\ \alpha_{\max}^2 + 1 - \left(\int_0^{\alpha_{\max}} \mathrm{M}(\mathrm{A}_\alpha) d\alpha\right)^2 - 1)}$$

$$= \sqrt{\text{máx}\ (0,\ \alpha_{\max}^2 - \left(\int_0^{\alpha_{\max}} \mathrm{M}(\mathrm{A}_\alpha) d\alpha\right)^2)}\,.$$

$$\mathrm{ME}(\mathrm{W}_{\psi}, \mathrm{N}_{\psi}, \mathrm{Prod})(\mathrm{A}) = \left(\text{máx}\ (0,\ \sqrt{\alpha_{\max}} - \sqrt{\int_0^{\alpha_{\max}} \mathrm{M}(\mathrm{A}_\alpha) d\alpha}\ )\right)^2$$

Observación 3.6.4.1.1

Se verifica que $\mathrm{ME}(\mathrm{W}, \mathrm{N}_{\psi}, \mathrm{Prod}) \leq \mathrm{ME}(\mathrm{W}, \mathrm{N}, \mathrm{Prod}) \leq \mathrm{ME}(\mathrm{W}, \mathrm{N}_{\varphi}, \mathrm{Prod})$.

Ejemplo 3.6.4.1.1: Conjunto borroso A

Sea A un conjunto borroso definido como:

$$A(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 0.5 \\ -2x+2 & 0.5 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$M(A_\alpha) = \dfrac{(2-\alpha)}{2} - \dfrac{\alpha}{2} = 1-\alpha$ para cualquier α, luego

$$\int_0^{\alpha_{max}} M(A_\alpha).d\alpha = \int_0^{\alpha_{max}} (1-\alpha)d\alpha = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 3.6.4.1.1.1

$$ME(W, N_\varphi, Prod)(A) = \alpha_{max} + \sqrt[2]{1 - \left(\int_0^{\alpha_{max}} M(A_\alpha).d\alpha \right)^2} - 1$$

$$= 1 + \sqrt[2]{1 - \left(\int_0^1 (1-a)\, da \right)^2} - 1$$

$$= \sqrt[2]{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0.8660$$

Ejemplo 3.6.4.1.1.2

$$ME(W, N_\psi, Prod)(A) = \text{máx}\ (0,\ \alpha_{max} + \int_0^{\alpha_{max}} M(A_\alpha).d\alpha - 2\sqrt[2]{\int_0^{\alpha_{max}} M(A_\alpha).d\alpha}\ )$$

$$= \text{máx}\{0,\ 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{2}}\} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} \cong 0.085786$$

Ejemplo 3.6.4.1.1.3

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{W}_{\varphi},\ \mathrm{N},\mathrm{Prod})\,(\mathrm{A}) = \sqrt{\text{máx}\,(0,\ \alpha^2_{\max} + \left(1\text{-}\int_0^{\alpha_{\max}} \mathrm{M}(\mathrm{A}_\alpha)d\alpha\right)^2 - 1)}$$

$$= \sqrt{\max(0,\ 1+\left(1\text{-}\frac{1}{2}\right)^2 - 1)}$$

$$= \sqrt{\left(1\text{-}\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Ejemplo 3.6.4.1.1.4

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{W}_{\psi},\ \mathrm{N},\mathrm{Prod})\,(\mathrm{A}) = \left(\text{máx}\,(0,\ \sqrt{\alpha_{\max}} + \sqrt{1\text{-}\int_0^{\alpha_{\max}} \mathrm{M}(\mathrm{A}_\alpha)d\alpha} - 1)\right)^2$$

$$= \left(\max(0,\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1/2 = 0.5$$

Ejemplo 3.6.4.1.1.5

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{W}_{\varphi},\ \mathrm{N}_{\varphi},\mathrm{Prod})\,(\mathrm{A}) = \sqrt{\text{máx}\,(0,\ \alpha^2_{\max} - \left(\int_0^{\alpha_{\max}} \mathrm{M}(\mathrm{A}_\alpha)d\alpha\right)^2)}$$

$$= \sqrt{\max\ (0,\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0.8660$$

$$= \mathrm{ME}\,(\mathrm{W},\ \mathrm{N}_{\varphi},\mathrm{Prod})\ (\mathrm{A}),$$

pues φ es un automorfismo de ([0,1], Prod).

Ejemplo 3.6.4.1.1.6

$$\mathrm{ME}(\mathrm{W}_{\psi},\ \mathrm{N}_{\psi},\ \mathrm{Prod})(\mathrm{A}) = \left(\text{máx}\ (0,\ \sqrt{\alpha_{\max}}\ - \sqrt{\int_0^{\alpha_{\max}} \mathrm{M}(\mathrm{A}_{\alpha})d\alpha}\ ) \right)^2$$

$$= \left(\max(0,\ 1-\frac{1}{\sqrt{2}}) \right)^2 = 0.085786 = \mathrm{ME}(\mathrm{W},\ \mathrm{N}_{\psi},\ \mathrm{Prod})(\mathrm{A}),$$

pues ψ es un automorfismo de ([0,1], Prod).

Ejemplo 3.6.4.1.2: Conjunto borroso B

Se calcula la $\prec$-medida borrosa de especificidad del conjunto borroso:

$$\mathrm{B(x)} = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 0.25 \\ 4x-1 & 0.25 \le x \le 0.5 \\ -4x+3 & 0.5 \le x \le 0.75 \\ 0 & 0.75 \le x \le 1 \end{cases}$$

$\mathrm{M}(\mathrm{B}_{\alpha}) = \dfrac{3-\alpha}{4} - \dfrac{\alpha+1}{4} = \dfrac{1-\alpha}{2}$ para cualquier α y $\displaystyle\int_0^{\alpha_{max}} \mathrm{M}(\mathrm{B}_{\alpha}).d\alpha$ es igual a $\displaystyle\int_0^{\alpha_{max}} \frac{1-\alpha}{2}\, d\alpha = \frac{1}{4}$.

Ejemplo 3.6.4.1.2.1

$$\mathrm{ME}(\mathrm{W},\ \mathrm{N}_{\varphi},\ \mathrm{Prod})(\mathrm{B}) = \text{máx}\ (0,\ \alpha_{\max} + \sqrt[2]{1 - \left(\int_0^{\alpha_{max}} M(B_{\alpha}).d\alpha \right)^2}\ - 1\ )$$

$$= \text{máx}\ (0,\ 1+ \sqrt[2]{1-\left(\int_0^1 \frac{1-\alpha}{2}\ d\alpha \right)^2}\ -1\ )$$

$$= \sqrt[2]{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4} \cong 0.968.$$

Ejemplo 3.6.4.1.2.2

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{W},\ \mathrm{N}_{\psi},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{B}) = \text{máx}\ (0,\ \alpha_{\max} + \int_0^{\alpha_{max}} M(B_\alpha).d\alpha - 2\sqrt[2]{\int_0^{\alpha_{max}} M(B_\alpha).d\alpha}\ )$$

$$= 1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{\sqrt{4}} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Ejemplo 3.6.4.1.2.3

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{W}_{\varphi},\ \mathrm{N},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{B}) = \sqrt{\text{máx}\ (0,\ \alpha_{\max}^2 + \left(1-\int_0^{\alpha_{\max}} \mathrm{M}(\mathrm{B}_\alpha)d\alpha\right)^2 - 1)}$$

$$= \sqrt{\max(0,\ 1+\left(1-\frac{1}{4}\right)^2 - 1)} = \frac{3}{4} = 0.75.$$

Ejemplo 3.6.4.1.2.4

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{W}_{\psi},\ \mathrm{N},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{B}) = \left(\text{máx}\ (0,\ \sqrt{\alpha_{\max}} + \sqrt{1-\int_0^{\alpha_{\max}} \mathrm{M}(\mathrm{B}_\alpha)d\alpha} - 1)\right)^2$$

$$= \left(\max(0,\ 1+\sqrt{\frac{3}{4}} - 1\right)^2 = \frac{3}{4} = 0.75.$$

Ejemplo 3.6.4.1.2.5

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{W}_{\varphi},\ \mathrm{N}_{\varphi},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{B}) = \mathrm{ME}\,(\mathrm{W},\ \mathrm{N}_{\varphi},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{B}) = \frac{\sqrt{15}}{4} \cong 0.968$$

Ejemplo 3.6.4.1.2.6

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{W}_\psi,\ \mathrm{N}_\psi, \mathrm{Prod})\,(\mathrm{B}) = \mathrm{ME}\,(\mathrm{W},\ \mathrm{N}_\psi, \mathrm{Prod})\,(\mathrm{B}) = \frac{1}{4} = 0.25$$

Ejemplo 3.6.4.1.3: Conjunto borroso C

Se calcula la $\prec$-medida borrosa de especificidad del conjunto borroso:

$$\mathrm{C(x)} = \begin{cases} x & 0 \le x \le 0.5 \\ 1-x & 0.5 \le x \le 1 \end{cases}$$

$M(C_\alpha) = 1-\alpha-\alpha = 1-2\alpha$ para α menor o igual a 0.5, y cero para α mayor que 0.5, es decir, $M(C_\alpha) = \begin{cases} 1-2\alpha & \text{si } \alpha \le 0.5 \\ 0 & \text{si } \alpha > 0.5 \end{cases}$ y

$$\int_0^{\alpha_{max}} M(C_\alpha).d\alpha = \int_0^{0.5} (1-2\alpha).d\alpha = \frac{1}{4}.$$

Ejemplo 3.6.4.1.3.1

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{W},\ \mathrm{N}_\varphi, \mathrm{Prod})\,(\mathrm{C}) = \text{máx}\ (0,\ \alpha_{\max} + \sqrt[2]{1-\left(\int_0^{\alpha_{\max}} M(C_\alpha).d\alpha\right)^2}\ - 1\ )$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt[2]{1-\left(\int_0^{0.5} (1-2\alpha)\,da\right)^2}\ -1$$

$$= \sqrt[2]{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{1}{2} \cong 0.468.$$

Ejemplo 3.6.4.1.3.2

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{W},\ \mathrm{N}_\psi, \mathrm{Prod})\,(\mathrm{C}) = \text{máx}\ (0,\ \alpha_{\max} + \int_0^{\alpha_{max}} M(C_\alpha).d\alpha - 2\sqrt[2]{\int_0^{\alpha_{max}} M(C_\alpha).d\alpha}\ )$$

$$= \text{máx}\ (0,\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{\sqrt{4}}) = 0.$$

Ejemplo 3.6.4.1.3.3

$$\text{ME}\,(\text{W}_{\varphi},\ \text{N, Prod})\,(\text{C}) = \sqrt{\text{máx}\ (0,\ \alpha_{\max}^{2} + \left(1\text{-} \int_{0}^{\alpha_{\max}} \text{M}(\text{C}_{\alpha})d\alpha\right)^{2} - 1)}$$

$$= \sqrt{\max(0,\ \left(\frac{1}{2}\right)^{2} + \left(1\text{-}\frac{1}{4}\right)^{2} - 1)}$$

$$= \ \text{máx}\ \{0,\ \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{16} - 1}\} = 0.$$

Ejemplo 3.6.4.1.3.4

$$\text{ME}\,(\text{W}_{\psi},\ \text{N, Prod})\,(\text{C}) = \left(\text{máx}\ (0,\ \sqrt{\alpha_{\max}} + \sqrt{1\text{-} \int_{0}^{\alpha_{\max}} \text{M}(\text{C}_{\alpha})d\alpha - 1})\right)^{2}$$

$$= \left(\max(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{3}{4}} - 1\right)^{2} \cong 0.328$$

Ejemplo 3.6.4.1.3.5

$$\text{ME}\,(\text{W}_{\varphi},\ \text{N}_{\varphi},\ \text{Prod})\,(\text{C}) = \text{ME}\,(\text{W},\ \text{N}_{\varphi},\ \text{Prod})\,(\text{C}) = \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{1}{2} \cong 0.468.$$

Ejemplo 3.6.4.1.3.6

$$\text{ME}\,(\text{W}_{\psi},\ \text{N}_{\psi},\ \text{Prod})\,(\text{C}) = \text{ME}\,(\text{W},\ \text{N}_{\psi},\ \text{Prod})\,(\text{C}) = 0.$$

Ejemplo 3.6.4.1.4: Conjunto borroso D

Se calcula la $\prec$-medida borrosa de especificidad del conjunto borroso:

$$D(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 0.25 \\ 2x - 1/2 & 0.25 \le x \le 0.5 \\ 3/2 - 2x & 0.5 \le x \le 0.75 \\ 0 & 0.75 \le x \le 1 \end{cases}$$

$M(D_\alpha) = \frac{3}{4} - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} - \alpha$ para α menor o igual a 0.5, y cero para α mayor que 0.5, es decir, $M(D_\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \alpha & \text{si } \alpha \le 0.5 \\ 0 & \text{si } \alpha > 0.5 \end{cases}$ y

$$\int_0^{\alpha_{max}} M(D_\alpha).d\alpha = \int_0^{\alpha_{max}} \frac{1}{2} - \alpha \, d\alpha = \frac{1}{8}.$$

Ejemplo 3.6.4.1.4.1

$$ME(W, N_\varphi, Prod)(D) = \text{máx } (0, \alpha_{max} + \sqrt[2]{1 - \left(\int_0^{\alpha_{max}} M(D_\alpha).d\alpha\right)^2} - 1)$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt[2]{1 - \left(\int_0^{0.5} \frac{1}{2} - \alpha \, d\alpha\right)^2} - 1$$

$$= \sqrt[2]{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{63}}{8} - \frac{1}{2} \cong 0.49.$$

Ejemplo 3.6.4.1.4.2

$$ME(W, N_\psi, Prod)(D) = \text{máx}\{0, \alpha_{max} + \int_0^{\alpha_{max}} M(D_\alpha).d\alpha - 2\sqrt[2]{\int_0^{\alpha_{max}} M(D_\alpha).d\alpha}\}$$

$$= \text{máx } \{0, \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{2}{\sqrt{8}}\} = 0.$$

Ejemplo 3.6.4.1.4.3

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{W}_{\varphi},\ \mathrm{N},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{C}) = \sqrt{\text{máx}\,(0,\ \alpha_{\max}^{2} + \left(1 - \int_{0}^{\alpha_{\max}} \mathrm{M}(\mathrm{D}_{\alpha})d\alpha\right)^{2} - 1)}$$

$$= \sqrt{\max(0,\ \left(\frac{1}{2}\right)^{2} + \left(1 - \frac{1}{8}\right)^{2} - 1)} = 0.125.$$

Ejemplo 3.6.4.1.4.4

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{W}_{\psi},\ \mathrm{N},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{D}) = \left(\text{máx}\,(0,\ \sqrt{\alpha_{\max}} + \sqrt{1 - \int_{0}^{\alpha_{\max}} \mathrm{M}(\mathrm{D}_{\alpha})d\alpha} - 1)\right)^{2}$$

$$= \left(\max(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{7}{8}} - 1\right)^{2} \cong 0.4128.$$

Ejemplo 3.6.4.1.4.5

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{W}_{\varphi},\ \mathrm{N}_{\varphi},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{D}) = \mathrm{ME}\,(\mathrm{W},\ \mathrm{N}_{\varphi},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{D}) = \frac{\sqrt{63}}{8} - \frac{1}{2} \cong 0.49.$$

Ejemplo 3.6.4.1.4.6

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{W}_{\psi},\ \mathrm{N}_{\psi},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{D}) = \mathrm{ME}\,(\mathrm{W},\ \mathrm{N}_{\psi},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{D}) = 0.$$

Ejemplo 3.6.4.1.5: Conjunto borroso E

Se calcula la $\prec$-medida borrosa de especificidad del conjunto borroso:

$$E(x) = \begin{cases} 4x & 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4} \\ 4-4x & \frac{3}{4} \le x \le 1 \end{cases}$$

$M(E_\alpha) = (1-\frac{\alpha}{4})-\frac{\alpha}{4} = 1-\frac{\alpha}{2}$ para todo α. Como $\alpha_{max}=1$ y

$\int_0^{\alpha_{max}} M(E_\alpha).d\alpha$ es igual a $\int_0^{\alpha_{max}} (1-\frac{\alpha}{2}).d\alpha = \frac{3}{4}$.

Ejemplo 3.6.4.1.5.1

$$ME(W, N_\varphi, Prod)(E) = \text{máx } (0,\ \alpha_{max} + \sqrt[2]{1-\left(\int_0^{\alpha_{max}} M(E_\alpha).d\alpha\right)^2} - 1\ )$$

$$= \text{máx } \{0,\ 1+ \sqrt[2]{1-\left(\int_0^1 1-\frac{\alpha}{2}\, d\alpha\right)^2} -1\} = \sqrt[2]{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4} \cong 0.66.$$

Ejemplo 3.6.4.1.5.2

$$ME(W, N_\psi, Prod)(E) = \text{máx } \{0,\ \alpha_{max} + \int_0^{\alpha_{max}} M(E_\alpha).d\alpha - 2\sqrt[2]{\int_0^{\alpha_{max}} M(E_\alpha).d\alpha}\ \}$$

$$= \text{máx } \{0,\ 1 + \frac{3}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{2}\} = \text{máx } \{0,\ \frac{7}{4} - \sqrt{3}\} = 0.0179\ .$$

Ejemplo 3.6.4.1.5.3

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{W}_{\varphi},\ \mathrm{N},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{C}) = \sqrt{\text{máx}\,(0,\ \alpha_{\max}^{2} + \left(1 - \int_{0}^{\alpha_{\max}} \mathrm{M}(\mathrm{E}_{\alpha})d\alpha\right)^{2} - 1)}$$

$$= \sqrt{\max(0,\ 1 + \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{2} - 1} = \frac{1}{4}.$$

Ejemplo 3.6.4.1.5.4

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{W}_{\psi},\ \mathrm{N},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{E}) = \left(\text{máx}\,(0,\ \sqrt{\alpha_{\max}} + \sqrt{1 - \int_{0}^{\alpha_{\max}} \mathrm{M}(\mathrm{E}_{\alpha})d\alpha} - 1)\right)^{2}$$

$$= \left(\max(0,\ 1 + \sqrt{\frac{1}{4}} - 1\right)^{2} = \frac{1}{4}.$$

Ejemplo 3.6.4.1.5.5

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{W}_{\varphi},\ \mathrm{N}_{\varphi},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{E}) = \mathrm{ME}\,(\mathrm{W},\ \mathrm{N}_{\varphi},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{E}) = \frac{\sqrt{7}}{4} \cong 0.66.$$

Ejemplo 3.6.4.1.5.6

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{W}_{\psi},\ \mathrm{N}_{\psi},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{E}) = \mathrm{ME}\,(\mathrm{W},\ \mathrm{N}_{\psi},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{E}) = 0.$$

Tabla 3.6.4.1

La siguiente tabla resume los resultados anteriores:

	T_1=W; T_2=Prod; N(x)=1-x; $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = \sqrt{x}$				
	N_φ	**N**	**N_ψ**	**W_φ**	**W_ψ**
B	0.968	0.75	0.25	0.75	0.75
A	0.866	0.5	0.086	0.5	0.5
E	0.66	0.25	0.018	0.25	0.25
D	0.49	0.375	0	0.125	0.413
C	0.468	0.25	0	0	0.328

Se observa que siempre es ME(B)>ME(A)>ME(E) y que ME(D)≥ME(C).

EJEMPLO 3.6.4.2: Medidas sobre las familias de (Prod, N, Prod)

Si T_1 es la t-norma Producto, T_2 es la t-norma producto, N la negación usual N(x)=1−x, M es la medida de Lebesgue dada por la longitud, $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = \sqrt{x}$ entonces

$$\mathrm{ME}(\mathrm{Prod}, N_\varphi, \mathrm{Prod})(A) = \alpha_{\max} \cdot \sqrt[2]{1 - \left(\int_0^{\alpha_{max}} M(A_\alpha).d\alpha\right)^2}$$

$$\mathrm{ME}(\mathrm{Prod}, N_\psi, \mathrm{Prod})(A) = \alpha_{\max} \cdot \left(1 - \sqrt[2]{\int_0^{\alpha_{\max}} M(A_\alpha).d\alpha}\right)^2$$

Observación 3.6.4.2.1

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod},\ \mathrm{N}_{\psi},\ \mathrm{Prod}) \leq \mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod},\ \mathrm{N},\ \mathrm{Prod}) \leq \mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod},\ \mathrm{N}_{\varphi},\ \mathrm{Prod}).$$

Observación 3.6.4.2.2

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod}_{\varphi},\ \mathrm{N},\ \mathrm{Prod}) = \mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod},\ \mathrm{N},\ \mathrm{Prod}) = \mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod}_{\psi},\ \mathrm{N},\ \mathrm{Prod}).$$

Observación 3.6.4.2.3

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod}_{\varphi},\ \mathrm{N}_{\varphi},\ \mathrm{Prod}) = \mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod},\ \mathrm{N}_{\varphi},\ \mathrm{Prod}).$$

Observación 3.6.4.2.4

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod}_{\psi},\ \mathrm{N}_{\psi},\ \mathrm{Prod}) = \mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod},\ \mathrm{N}_{\psi},\ \mathrm{Prod}).$$

Ejemplo 3.6.4.2.1: Conjunto borroso A

Sea A el conjunto borroso definido como:

$$A(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 0.5 \\ -2x+2 & 0.5 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$M(A_\alpha) = \dfrac{(2-\alpha)}{2} - \dfrac{\alpha}{2} = 1-\alpha$ para cualquier α, luego

$$\int_0^{\alpha_{max}} M(A_\alpha).d\alpha = \int_0^{\alpha_{max}} (1-\alpha)d\alpha = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 3.6.4.2.1.1

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod},\ \mathrm{N}_{\varphi},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{A}) = \alpha_{\max} \cdot \sqrt[2]{1 - \left(\int_0^{\alpha_{max}} M(A_\alpha).d\alpha\right)^2}$$

$$= \sqrt[2]{1 - \left(\int_0^1 (1-a)\,da\right)^2} = \sqrt[2]{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0.866$$

Ejemplo 3.6.4.2.1.2

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod},\ \mathrm{N}_{\psi},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{A}) = \alpha_{\max} \cdot \left(1 - \sqrt[2]{\int_0^{\alpha_{\max}} \mathrm{M}(\mathrm{A}_\alpha).d\alpha}\right)^2$$

$$= 1.\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cong (0.293)^2 \cong 0.0858$$

Ejemplo 3.6.4.2.1.3

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod}_{\varphi},\ \mathrm{N},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{A}) = \mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod},\ \mathrm{N},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{A}) = \mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod}_{\psi},\ \mathrm{N},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{A}) = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 3.6.4.2.1.4

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod}_{\varphi},\ \mathrm{N}_{\varphi},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{A}) = \mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod},\ \mathrm{N}_{\varphi},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{A}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0.866\ .$$

Ejemplo 3.6.4.2.1.5

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod}_{\psi},\ \mathrm{N}_{\psi},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{A}) = \mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod},\ \mathrm{N}_{\psi},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{A}) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cong\ 0.0858$$

.

Ejemplo 3.6.4.2.2: Conjunto borroso B

Se calculan la $\prec$-medidas borrosas de especificidad del conjunto borroso:

$$B(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 0.25 \\ 4x-1 & 0.25 \le x \le 0.5 \\ -4x+3 & 0.5 \le x \le 0.75 \\ 0 & 0.75 \le x \le 1 \end{cases}$$

$M(B_\alpha) = \dfrac{3-\alpha}{4} - \dfrac{\alpha+1}{4} = \dfrac{1-\alpha}{2}$ para cualquier α y $\int_0^{\alpha_{max}} M(B_\alpha).d\alpha$ es igual a $\int_0^{\alpha_{max}} \dfrac{1-\alpha}{2} d\alpha = \dfrac{1}{4}$.

Ejemplo 3.6.4.2.2.1

$$ME(Prod, N_\varphi, Prod)(B) = \alpha_{max} \cdot \sqrt[2]{1 - \left(\int_0^{\alpha_{max}} M(B_\alpha).d\alpha\right)^2}$$

$$= \sqrt[2]{1 - \left(\int_0^1 (1-\alpha)/2\, da\right)^2} = \sqrt[2]{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4} \cong 0.968 .$$

Ejemplo 3.6.4.2.2.2

$$ME(Prod, N_\psi, Prod)(B) = \alpha_{max} \cdot \left(1 - \sqrt[2]{\int_0^{\alpha_{max}} M(B_\alpha).d\alpha}\right)^2$$

$$= 1.\left(1 - \frac{1}{\sqrt{4}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0.25 .$$

Ejemplo 3.6.4.2.2.3

$$ME(Prod_\varphi, N, Prod)(B) = ME(Prod, N, Prod)(B) = ME(Prod_\psi, N, Prod)(B) = \frac{3}{4}.$$

Ejemplo 3.6.4.2.2.4

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod}_{\varphi},\ \mathrm{N}_{\varphi},\ \mathrm{Prod})(\mathrm{B}) = \mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod},\ \mathrm{N}_{\varphi},\ \mathrm{Prod})(\mathrm{B}) = \frac{\sqrt{15}}{4} \cong 0.9468\ .$$

Ejemplo 3.6.4.2.2.5

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod}_{\psi},\ \mathrm{N}_{\psi},\ \mathrm{Prod})(\mathrm{B}) = \mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod},\ \mathrm{N}_{\psi},\ \mathrm{Prod})(\mathrm{B}) = \frac{1}{4} = 0.25\ .$$

Ejemplo 3.6.4.2.3: Conjunto borroso C

Se calculan las $\prec$-medidas borrosas de especificidad del conjunto borroso:

$$\mathrm{C(x)} = \begin{cases} x & 0 \le x \le 0.5 \\ 1-x & 0.5 \le x \le 1 \end{cases}$$

$M(C_\alpha) = 1-\alpha-\alpha = 1-2\alpha$ para α menor o igual a 0.5, y cero para α mayor que 0.5, es decir, $M(C_\alpha)=\begin{cases} 1-2\alpha & \text{si } \alpha \le 0.5 \\ 0 & \text{si } \alpha > 0.5 \end{cases}$ y

$$\int_0^{\alpha_{max}} M(C_\alpha).d\alpha = \int_0^{0.5} (1-2\alpha).d\alpha = \frac{1}{4}.$$

Ejemplo 3.6.4.2.3.1

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod},\ \mathrm{N}_{\varphi},\ \mathrm{Prod})(\mathrm{C}) = \alpha_{\max}\ .\sqrt[2]{1-\left(\int_0^{\alpha_{max}} M(C_\alpha).d\alpha\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}.\ \sqrt[2]{1-\left(\int_0^{0.5} (1-2\alpha)\,da\right)^2} = \frac{1}{2}.\sqrt[2]{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{8} \cong 0.484.$$

Ejemplo 3.6.4.2.3.2

$$\text{ME}\,(\text{Prod},\ \text{N}_{\psi},\ \text{Prod})\,(\text{C}) = \alpha_{\max}\ .\ \left(1-\sqrt[2]{\int_0^{\alpha_{\max}} \text{M}(\text{C}_\alpha).d\alpha}\ \right)^2$$

$$= \frac{1}{2}.\left(1-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} = 0.125\ .$$

Ejemplo 3.6.4.2.3.3

$$\text{ME}\,(\text{Prod}_{\varphi},\ \text{N},\ \text{Prod})\,(\text{C}) = \text{ME}\,(\text{Prod},\ \text{N},\ \text{Prod})\,(\text{C}) = \text{ME}\,(\text{Prod}_{\psi},\ \text{N},\ \text{Prod})\,(\text{C}) = \frac{3}{8}.$$

Ejemplo 3.6.4.2.3.4

$$\text{ME}\,(\text{Prod}_{\varphi},\ \text{N}_{\varphi},\ \text{Prod})\,(\text{C}) = \text{ME}\,(\text{Prod},\ \text{N}_{\varphi},\ \text{Prod})\,(\text{C}) = \frac{\sqrt{15}}{8} \cong 0.484.$$

Ejemplo 3.6.4.2.3.5

$$\text{ME}\,(\text{Prod}_{\psi},\ \text{N}_{\psi},\ \text{Prod})\,(\text{B}) = \text{ME}\,(\text{Prod},\ \text{N}_{\psi},\ \text{Prod})\,(\text{C}) = 1/8 = 0.125\ .$$

Ejemplo 3.6.4.2.4: Conjunto borroso D

Se calculan las $\prec$-medidas borrosas de especificidad del conjunto borroso:

$$\text{D(x)} = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 0.25 \\ 2x - 1/2 & 0.25 \le x \le 0.5 \\ 3/2 - 2x & 0.5 \le x \le 0.75 \\ 0 & 0.75 \le x \le 1 \end{cases}$$

$M(D_\alpha) = \frac{3}{4} - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} - \alpha$ para α menor o igual a 0.5, y cero para α mayor que 0.5, es decir, $M(D_\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \alpha & \text{si } \alpha \leq 0.5 \\ 0 & \text{si } \alpha > 0.5 \end{cases}$ y

$$\int_0^{\alpha_{max}} M(D_\alpha).d\alpha = \int_0^{\alpha_{max}} \frac{1}{2} - \alpha \, d\alpha = \frac{1}{8}.$$

Ejemplo 3.6.4.2.4.1

$$ME(Prod, N_\varphi, Prod)(D) = \alpha_{max} \cdot \sqrt[2]{1 - \left(\int_0^{\alpha_{max}} M(D_\alpha).d\alpha \right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt[2]{1 - \left(\int_0^{0.5} (1/2 - \alpha)\, da \right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[2]{1 - \left(\frac{1}{8} \right)^2} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{63}}{8} = \frac{\sqrt{63}}{16} \cong 0.496.$$

Ejemplo 3.6.4.2.4.2

$$ME(Prod, N_\psi, Prod)(D) = \alpha_{max} \cdot \left(1 - \sqrt[2]{\int_0^{\alpha_{max}} M(D_\alpha).d\alpha} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{8}} \right)^2 \cong 0.2089 .$$

Ejemplo 3.6.4.2.4.3

$$ME(Prod_\varphi, N, Prod)(D) = ME(Prod, N, Prod)(D)$$

$$= ME(Prod_\psi, N, Prod)(D) = \frac{7}{16}.$$

Ejemplo 3.6.4.2.4.4

$$\text{ME}(\text{Prod}_\varphi, \text{N}_\varphi, \text{Prod})(\text{D}) = \text{ME}(\text{Prod}, \text{N}_\varphi, \text{Prod})(\text{D}) = \frac{\sqrt{63}}{16} \cong 0.496.$$

Ejemplo 3.6.4.2.4.5

$$\text{ME}(\text{Prod}_\psi, \text{N}_\psi, \text{Prod})(\text{D}) = \text{ME}(\text{Prod}, \text{N}_\psi, \text{Prod})(\text{D})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{8}}\right)^2 \cong 0.2089$$

Ejemplo 3.6.4.2.5: Conjunto borroso E

Se calculan las $\prec$-medidas borrosas de especificidad del conjunto borroso:

$$\text{E}(\text{x}) = \begin{cases} 4x & 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4} \\ 4 - 4x & \frac{3}{4} \le x \le 1 \end{cases}$$

$\text{M}(\text{E}_\alpha) = (1 - \frac{\alpha}{4}) - \frac{\alpha}{4} = 1 - \frac{\alpha}{2}$ para todo α. Como $\alpha_{\max}=1$ y

$\int_0^{\alpha_{max}} \text{M}(\text{E}_\alpha).\text{d}\alpha$ es igual a $\int_0^{\alpha_{max}} (1 - \frac{\alpha}{2}).\text{d}\alpha = \frac{3}{4}$.

Ejemplo 3.6.4.2.5.1

$$\text{ME}(\text{Prod}, \text{N}_\varphi, \text{Prod})(\text{E}) = \alpha_{\max} \cdot \sqrt[2]{1 - \left(\int_0^{\alpha_{max}} M(E_\alpha).d\alpha\right)^2}$$

$$= \sqrt[2]{1 - \left(\int_0^1 (1 - \alpha/2)\, da \right)^2} = \sqrt[2]{1 - \left(\frac{3}{4} \right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4} \cong 0.66.$$

Ejemplo 3.6.4.2.5.2

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod},\ \mathrm{N}_{\psi},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{E}) = \alpha_{\max} \cdot \left(1 - \sqrt[2]{\int_0^{\alpha_{\max}} \mathrm{M}(\mathrm{E}_{\alpha}).d\alpha} \right)^2$$

$$= 1.\left(1 - \sqrt{\frac{3}{4}} \right)^2 \cong 0.0179\ .$$

Ejemplo 3.6.4.2.5.3

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod}_{\varphi},\ \mathrm{N},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{E}) = \mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod},\ \mathrm{N},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{E})$$

$$= \mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod}_{\psi},\ \mathrm{N},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{E}) = \frac{1}{4}.$$

Ejemplo 3.6.4.2.5.4

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod}_{\varphi},\ \mathrm{N}_{\varphi},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{E}) = \mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod},\ \mathrm{N}_{\varphi},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{E}) = \frac{\sqrt{7}}{4} \cong 0.66.$$

Ejemplo 3.6.4.2.5.5

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod}_{\psi},\ \mathrm{N}_{\psi},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{E}) = \mathrm{ME}\,(\mathrm{Prod},\ \mathrm{N}_{\psi},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{E})$$

$$= 1.\left(1 - \sqrt{\frac{3}{4}} \right)^2 \cong 0.0179$$

Tabla 3.6.4.2

La siguiente tabla resume los resultados anteriores:

	T_1=Prod;T_2=Prod; N(x)=1x; $\varphi(x)=x^2$,$\psi(x)=\sqrt{x}$				
	N_φ	**N**	**N_ψ**	**$Prod_\varphi$**	**$Prod_\psi$**
B	0.968	0.75	0.25	0.75	0.75
A	0.866	0.5	0.086	0.5	0.5
E	0.66	0.25	0.018	0.25	0.25
D	0.496	0.437	0.209	0.437	0.437
C	0.484	0.375	0.125	0.375	0.375

Se observa que siempre es ME(B)≥ME(A)≥ME(E) y que ME(D)≥ME(C).

EJEMPLO 3.6.4.3: Medidas sobre las familias de (Min, N, Prod)

Si T_1 es la t-norma mínimo, T_2 es la t-norma producto, N la negación usual N(x)=1−x, M es la medida de Lebesgue dada por la longitud, $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = \sqrt{x}$ entonces

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{Min},\ \mathrm{N}_\varphi,\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{A}) = \min\{\alpha_{\max}\ ,\sqrt[2]{1-\left(\int_0^{\alpha_{max}} M(A_\alpha).d\alpha\right)^2}\ \}.$$

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{Min},\ \mathrm{N}_\psi,\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{A}) = \min\ \{\alpha_{\max},\ \left(1-\sqrt[2]{\int_0^{\alpha_{\max}} \mathrm{M}(\mathrm{A}_\alpha).d\alpha}\ \right)^2\ \}.$$

Observación 3.6.4.3.1

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{Min},\ N_{\psi}, \mathrm{Prod}) \le \mathrm{ME}\,(\mathrm{Min},\ \mathrm{N}, \mathrm{Prod}) \le \mathrm{ME}\,(\mathrm{Min},\ N_{\varphi}, \mathrm{Prod}).$$

Observación 3.6.4.3.2

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{Min}_{\varphi},\ \mathrm{N}, \mathrm{Prod}) = \mathrm{ME}\,(\mathrm{Min},\ \mathrm{N}, \mathrm{Prod}) = \mathrm{ME}\,(\mathrm{Min}_{\psi},\ \mathrm{N}, \mathrm{Prod}).$$

Ejemplo 3.6.4.3.1: Conjunto borroso A

Sea A un conjunto borroso definido como:

$$A(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 0.5 \\ -2x+2 & 0.5 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$M(A_\alpha) = \dfrac{(2-\alpha)}{2} - \dfrac{\alpha}{2} = 1-\alpha$ para cualquier α, luego

$$\int_0^{\alpha_{max}} M(A_\alpha).d\alpha = \int_0^{\alpha_{max}} (1-\alpha)d\alpha = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 3.6.4.3.1.1

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{Min},\ N_{\varphi}, \mathrm{Prod})\,(A) = \min\ \{\alpha_{\max},\ \sqrt[2]{1-\left(\int_0^{\alpha_{max}} M(A_\alpha).d\alpha\right)^2}\ \}$$

$$= \min\ \{1,\ \sqrt[2]{1-\left(\int_0^{1} (1-a)\,da\right)^2}\ \}$$

$$= \sqrt[2]{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0.8660$$

Ejemplo 3.6.4.3.1.2

$$ME(\text{Min}, N_\psi, \text{Prod})(A) = \min\ \{\alpha_{\max}, \left(1-\sqrt[2]{\int_0^{\alpha_{\max}} M(A_\alpha).d\alpha}\ \right)^2\ \}$$

$$= \min\ \{1, \left(1-\sqrt[2]{\frac{1}{2}}\ \right)^2\ \} \cong 0.085786$$

Ejemplo 3.6.4.3.2: Conjunto borroso B

Se calcula la $\prec$-medida borrosa de especificidad del conjunto borroso:

$$B(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 0.25 \\ 4x-1 & 0.25 \le x \le 0.5 \\ -4x+3 & 0.5 \le x \le 0.75 \\ 0 & 0.75 \le x \le 1 \end{cases}$$

$M(B_\alpha) = \dfrac{3-\alpha}{4} - \dfrac{\alpha+1}{4} = \dfrac{1-\alpha}{2}$ para cualquier α y

$\int_0^{\alpha_{max}} M(B_\alpha).d\alpha$ es igual a $\int_0^{\alpha_{max}} \dfrac{1-\alpha}{2} d\alpha = \dfrac{1}{4}$.

Ejemplo 3.6.4.3.2.1

$$ME(\text{Min}, N_\varphi, \text{Prod})(B) = \min\ \{\alpha_{\max}, \sqrt[2]{1-\left(\int_0^{\alpha_{max}} M(B_\alpha).d\alpha\right)^2}\ \}$$

$$= \min\ \{1, \sqrt[2]{1-\left(\int_0^1 \frac{1-\alpha}{2}\, d\alpha\right)^2}$$

$$= \sqrt[2]{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4} \cong 0.968.$$

Ejemplo 3.6.4.3.2.2

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{Min},\ \mathrm{N}_{\psi},\ \mathrm{Prod})(\mathrm{B}) = \min\ \{\alpha_{\max},\ \left(1-\sqrt[2]{\int_0^{\alpha_{\max}} \mathrm{M}(\mathrm{B}_\alpha).d\alpha}\ \right)^2\ \}$$

$$= \min\ \{1,\ \left(1-\sqrt[2]{\frac{1}{4}}\ \right)^2\ \}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Ejemplo 3.6.4.3.3: Conjunto borroso C

Se calcula la $\prec$-medida borrosa de especificidad del conjunto borroso:

$$\mathrm{C(x)} = \begin{cases} x & 0 \le x \le 0.5 \\ 1-x & 0.5 \le x \le 1 \end{cases}$$

$\mathrm{M}(\mathrm{C}_\alpha) = 1-\alpha-\alpha = 1-2\alpha$ para α menor o igual a 0.5, y cero para α mayor que 0.5, es decir, $\mathrm{M}(\mathrm{C}_\alpha) = \begin{cases} 1-2\alpha & \text{si } \alpha \le 0.5 \\ 0 & \text{si } \alpha > 0.5 \end{cases}$ y

$$\int_0^{\alpha_{max}} \mathrm{M}(\mathrm{C}_\alpha).d\alpha = \int_0^{0.5} (1-2\alpha).d\alpha = \frac{1}{4}.$$

Ejemplo 3.6.4.3.3.1

$$\mathrm{ME}\,(\mathrm{Min},\ \mathrm{N}_{\varphi},\ \mathrm{Prod})\,(\mathrm{C}) = \min\{\alpha_{\max},\ \sqrt[2]{1-\left(\int_0^{\alpha_{\max}} \mathrm{M}(\mathrm{C}_\alpha).d\alpha\right)^2}\ \}$$

$$= \min\{\frac{1}{2},\ \sqrt[2]{1-\left(\int_0^{0.5} (1-2\alpha)\,da\right)^2}\ \}$$

$$= \min\{\frac{1}{2},\ \sqrt[2]{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}\ \} = \min\{\frac{1}{2},\ 0.968\} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 3.6.4.3.3.2

$$\text{ME}(\text{Min}, N_\psi, \text{Prod})(\text{B}) = \min \{\alpha_{max}, \left(1-\sqrt[2]{\int_0^{\alpha_{max}} M(C_\alpha).d\alpha}\right)^2 \}$$

$$= \min \{\frac{1}{2}, \left(1-\sqrt[2]{\frac{1}{4}}\right)^2 \} = \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\} = \frac{1}{4}.$$

Ejemplo 3.6.4.3.4: Conjunto borroso D

Se calcula la $\prec$-medida borrosa de especificidad del conjunto borroso:

$$D(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 0.25 \\ 2x - 1/2 & 0.25 \le x \le 0.5 \\ 3/2 - 2x & 0.5 \le x \le 0.75 \\ 0 & 0.75 \le x \le 1 \end{cases}$$

$M(D_\alpha) = \frac{3}{4} - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} - \alpha$ para α menor o igual a 0.5, y cero para α mayor que 0.5, es decir, $M(D_\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \alpha & \text{si } \alpha \le 0.5 \\ 0 & \text{si } \alpha > 0.5 \end{cases}$ y

$$\int_0^{\alpha_{max}} M(D_\alpha).d\alpha = \int_0^{\alpha_{max}} \frac{1}{2} - \alpha \, d\alpha = \frac{1}{8}.$$

Ejemplo 3.6.4.3.4.1

$$\text{ME}(\text{Min}, N_\varphi, \text{Prod})(\text{D}) = \min \{\alpha_{max}, \sqrt[2]{1-\left(\int_0^{\alpha_{max}} M(D_\alpha).d\alpha\right)^2} \}$$

$$= \min\{\frac{1}{2}, \sqrt[2]{1-\left(\int_0^{0.5} \frac{1}{2} - \alpha \, d\alpha\right)^2} \}$$

$$= \min\{\frac{1}{2}, 0.992\} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 3.6.4.3.4.2

$$\text{ME}(\text{Min}, N_{\psi}, \text{Prod})(D) = \min\{\alpha_{max}, \left(1-\sqrt[2]{\int_0^{\alpha_{max}} M(D_\alpha).d\alpha}\right)^2\}$$

$$= \min\{\frac{1}{2}, \left(1-\sqrt[2]{\frac{1}{8}}\right)^2\} = \min\{\frac{1}{2}, 0.4178\} = 0.4178.$$

Ejemplo 3.6.4.3.5: Conjunto borroso E

Se calcula la $\prec$-medida borrosa de especificidad del conjunto borroso:

$$E(x) = \begin{cases} 4x & 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4} \\ 4-4x & \frac{3}{4} \le x \le 1 \end{cases}$$

$M(E_\alpha) = (1-\frac{\alpha}{4})-\frac{\alpha}{4} = 1-\frac{\alpha}{2}$ para todo α. Como $\alpha_{max}=1$ y

$\int_0^{\alpha_{max}} M(E_\alpha).d\alpha$ es igual a $\int_0^{\alpha_{max}} (1-\frac{\alpha}{2}).d\alpha = \frac{3}{4}$.

Ejemplo 3.6.4.3.5.1

$$\text{ME}(\text{Min}, N_{\varphi}, \text{Prod})(E) = \min\{\alpha_{max}, \sqrt[2]{1-\left(\int_0^{\alpha_{max}} M(E_\alpha).d\alpha\right)^2}\}$$

$$= \min\{1, \sqrt[2]{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}\} = \min\{1, \frac{\sqrt{7}}{4}\} = \frac{\sqrt{7}}{4} \cong 0.66.$$

Ejemplo 3.6.4.3.5.2

$$\text{ME}\,(\text{Min},\, N_{\psi},\, \text{Prod})\,(\text{E}) = \min\ \{\alpha_{\max},\ \left(1-\sqrt[2]{\int_0^{\alpha_{\max}} \text{M}(\text{E}_{\alpha}).d\alpha}\right)^2\ \}$$

$$= \min\ \{1,\ \left(1-\sqrt[2]{\frac{3}{4}}\right)^2\ \} = 0.0179\ .$$

Tabla 3.6.4.3

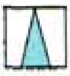
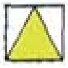
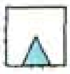
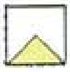
La siguiente tabla resume los resultados anteriores con T_1=Min ; T_2=Prod; N(x)=1-x; $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = \sqrt{x}$.

	N$_\varphi$	**N**	**N$_\psi$**
B	0.968	0.75	0.25
A	0.866	0.5	0.086
E	0.66	0.25	0.018
D	0.5	0.5	0.4178
C	0.5	0.5	0.25

Tabla 3.6.4.4

La siguiente tabla resume todos los resultados anteriores con T_2=Prod;

$N(x)=1-x$; $\varphi(x) = x^2$ y $\psi(x) = \sqrt{x}$.

	T_1 =	**W**			W_φ	W_ψ	**Prod; $Prod_\varphi$; $Prod_\psi$**			**Min**		
		N_φ	**N**	N_ψ	**N**	**N**	N_φ	**N**	N_ψ	N_φ	**N**	N_ψ
B		0.968	0.75	0.25	0.75	0.75	0.968	0.75	0.25	0.968	0.75	0.25
A		0.866	0.5	0.086	0.5	0.5	0.866	0.5	0.086	0.866	0.5	0.086
E		0.66	0.25	0.018	0.25	0.25	0.66	0.25	0.018	0.66	0.25	0.018
D		0.49	0.375	0	0.125	0.413	0.496	0.437	0.209	0.5	0.5	0.4178
C		0.468	0.25	0	0	0.328	0.484	0.375	0.125	0.5	0.5	0.25

Observacion 3.6.4.4.1

En el caso de los conjuntos borrosos normales la t-norma T_1 elegida para calcular $ME(T_1, N, T_2)$ es irrelevante, pues al ser a_1=1 se tiene que

$$ME(T_1, N, T_2)(A) = T_1\left(\alpha_{max}, N\int_0^{\alpha_{max}} T_2(M(A_\alpha), d\alpha\right)$$

$$= T_1\left(1, N\int_0^{\alpha_{max}} T_2(M(A_\alpha), d\alpha\right)$$

$$= N\int_0^{\alpha_{max}} T_2(M(A_\alpha), d\alpha).$$

Observación 3.6.4.4.2

Se verifica que $ME(T_1, N_\psi, Prod) \leq ME(T_1, N, Prod) \leq ME(T_1, N_\varphi, Prod)$.

Observación 3.6.4.4.3

Se observa que aunque la medida $ME(W, N_\psi, Prod)$, que es la más estricta de todas, no es muy útil en el caso de los conjuntos borrosos no normales, pues no discrimina. Sin embargo la medida $ME(Prod, N_\psi, Prod)$, que es la más estricta cuando T_1 = Prod, si discrimina los subconjuntos borroso no normales.

Observación 3.6.4.4.4

Se observa que la medida $ME(Min, N_\varphi, Prod)$ es la menos estricta de todas las calculadas.

3.7. DEFINICIÓN DE LA $\prec$-MEDIDA BORROSA DE ESPECIFICIDAD SOBRE UNIVERSOS INFINITOS UTILIZANDO LA INTEGRAL DE SUGENO

Se define la $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de Sugeno, donde N es una negación; T_1 y T_2 son t-normas y M es una medida clásica definida sobre los subconjuntos de nivel de A, y α_{max} el mayor valor alcanzado por el subconjunto borroso A:

$$\mathbf{ME(A) = T_1(\alpha_{max}, N(Sup}_{\alpha \in [0,1]} \mathbf{\{T_2(M(A_\alpha), \alpha)\}))}.$$

La expresión $\text{Sup}_{\alpha \in [0,1]} \{T_2(M(A_\alpha), \alpha)\}$ es la integral de *Sugeno* del conjunto borroso A, es decir, $(S)\int_X A(w).dM(w) = \text{Sup}_{\alpha \in [0,1]} \{T_2 (M(A_\alpha), \alpha)\}$, y que si A es un conjunto clásico entonces su integral de *Sugeno* coincide con M(A). (Ver apéndice).

3.7.1. Propiedades

En este apartado se prueban propiedades originales de esta $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* para comprobar bajo qué condiciones es una medida de especificidad según *Yager*, y que es una $\prec$-medida borrosa de especificidad regular.

Propiedad 3.7.1.1

La $\prec$-medida borrosa de especificidad definida utilizando la integral de

Sugeno del conjunto vacío es cero

Demostración:

$ME(\varnothing) = T_1\{0,\ N(M(\varnothing))\} = 0.$ ∎

Propiedad 3.7.1.2

Si A y B son subconjuntos borrosos normales y $A \subseteq B$ entonces $ME(A) \geq ME(B)$.

Demostración:

$$ME(A) = T_1(\alpha_{max}, N(\mathrm{Sup}_{\alpha\in[0,1]}\{T_2(M(A_\alpha), \alpha)\}))$$

$$= T_1(1, N(\mathrm{Sup}_{\alpha\in[0,1]}\{T_2(M(A_\alpha), \alpha)\}))$$

$$= N(\mathrm{Sup}_{\alpha\in[0,1]}\{T_2(M(A_\alpha), \alpha)\})$$

$$\geq N(\mathrm{Sup}_{\alpha\in[0,1]}\{T_2(M(B_\alpha), \alpha)\})$$

$$= T_1(1, N(\mathrm{Sup}_{\alpha\in[0,1]}\{T_2(M(B_\alpha), \alpha)\})) = ME(B).$$ ∎

Propiedad 3.7.1.3

Si A es un conjunto clásico distinto del vacío entonces $ME(A) = N(M(A))$. Y si N es la negación usual $ME(A) = 1-M(A)$.

Demostración:

En efecto $ME(A) = T_1(1, N(\mathrm{Sup}_{\alpha\in[0,1]}\{T_2(M(A_\alpha), \alpha)\}))$

$$= T_1(1, N(M(A))) = N(M(A)).$$ ∎

Propiedad 3.7.1.4

Si A es un conjunto clásico unitario entonces $ME(A) = 1$.

Demostración:

Al ser A un conjunto clásico entonces ME(A) = N(M(A)), y la medida de *Lebesgue* de un conjunto unitario es cero, luego ME(A) = 1. ▮

Propiedad 3.7.1.5

Si A y B son dos conjuntos clásicos y M(A) ≥ M(B) entonces ME(A) ≤ ME(B)

La demostración es consecuencia inmediata de la propiedad anterior. ▮

Propiedad 3.7.1.6

La $\prec$-medida borrosa de especificidad definida utilizando la integral de Sugeno es una $\prec$-medida borrosa de especificidad regular

Demostración:

ME(X) = N(M(X)) = N(1) = 0. ▮

Propiedad 3.7.1.7

Si T_2 es una t-norma positiva, N es una negación fuerte y si se impone la condición a la medida M de ser M(B)=0 si y sólo si B es igual al vacío o a un conjunto clásico unitario, entonces la $\prec$-medida borrosa de especificidad definida utilizando la integral de *Sugeno* es una **medida de especificidad** según *Yager*.

Demostración:

Las propiedades 3.7.1.1, 3.7.1.2 y 3.7.1.4 prueban que ME verifica las condiciones para ser una $\prec$-medida borrosa de especificidad. Falta comprobar que ME(A) = 1 si y sólo si A = {x}.

Para que ME(A) sea igual a 1 debe ser:

$1 = T_1(\alpha_{max}, N(\mathrm{Sup}_{\alpha\in[0,1]} \{T_2 (M(A_\alpha), \alpha)\}))$.

Por tanto $\alpha_{max} = 1$ y $N(\mathrm{Sup}_{\alpha\in[0,1]} \{T_2 (M(A_\alpha), \alpha)\}) = 1$.

Luego A debe ser un subconjunto borroso normal y si la negación N es fuerte entonces $\mathrm{Sup}_{\alpha\in[0,1]} \{T_2 (M(A_\alpha), \alpha)\} = 0$, es decir, para todo α debe ser $T_2(M(A_\alpha), \alpha) = 0$. Y si T_2 es una t-norma positiva esto supone que si α es distinto de cero $M(A_\alpha)$ debe valer cero. Luego por la condición impuesta a M debe ser $A = \{x\}$.∎

3.7.2. EJEMPLOS

En este apartado se presentan numerosos ejemplos de $\prec$-medidas borrosas de especificidad utilizando la integral de Sugeno y se ofrece el desarrollo de los cálculos de dichas medidas, no porque sean complejos sino por su originalidad.

Los diferentes ejemplos se tomarán sobre los mismos 5 conjuntos borrosos A, B, C, D y E utilizados en el apartado anterior De nuevo se ofrecen ejemplos para mostrar cómo varían las $\prec$-medidas borrosas de especificidad según las diferentes familias de t-normas y negaciones que se consideren. En todos los casos se considerará N como la negación usual y M es la medida de *Lebesgue*.

En el apartado 3.7.2.1 se desarrollan los cálculos para los cinco ejemplos siendo T_1 y T_2 la t-norma mínimo, en el 3.7.2.2 T_1 es la t-norma producto y T_2 es la t-norma mínimo, en el 3.7.2.3 T_1 es la t-norma de *Łukasiewicz* y T_2 es la t-norma mínimo, en el 3.7.2.4 T_1 es la t-norma mínimo y T_2 es la t-norma producto, en el 3.7.2.5 T_1 y T_2 son la t-norma producto, en el 3.7.2.6 T_1 es la t-norma de *Łukasiewicz* y T_2 es la t-norma producto y en el apartado 3.7.2.7 se considera T_2 la t-norma de *Łukasiewicz* y T_1 es cualquiera de las t-normas mínimo, producto o *Łukasiewicz*. En todas estas subsecciones se incluye una observación sobre las $\prec$-medidas borrosas de especificidad de los cinco conjuntos borrosos. Finalmente se resumen los resultados de todos estos ejemplos en la tabla 3.7.2.

Ejemplo 3.7.2.1:

Si T_1 y T_2 son la t-norma mínimo, N es la negación usual y M es la medida de *Lebesgue* entonces:

$$\mathbf{ME(A) = Mín(\alpha_{max}, 1-Sup_{\alpha \in [0,1]} \{Mín(M(A_\alpha), \alpha)\}).}$$

Se aplica para calcular la $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* de los conjuntos borrosos anteriores:

Ejemplo 3.7.2.1.1

Sea A el conjunto borroso definido por

$$A(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 0.5 \\ -2x+2 & 0.5 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para cualquier α, $A_\alpha = [\frac{\alpha}{2}, \frac{2-\alpha}{2}]$ y $M(A_\alpha) = \frac{2-\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1-\alpha$. Como $\alpha_{max}=1$ entonces:

$$\begin{aligned} ME(A) &= Mín(\alpha_{max}, 1-Sup_{\alpha \in [0,1]} \{Mín(M(A_\alpha), \alpha)\}) \\ &= Mín(1, 1-Sup_{\alpha \in [0,1]} \{Mín(1-\alpha, \alpha)\}) \end{aligned}$$

$$= \text{Mín}(1,\ 1- \text{Sup}_{\alpha\in[0,\ 1]}(\begin{cases}1-\alpha & \alpha \geq 0.5\\ \alpha & \alpha \leq 0.5\end{cases}))$$

$$= \text{Mín}(1,\ 1-0.5) = 0.5.$$

Ejemplo 3.7.2.1.2

Sea B el conjunto borroso:

$$B(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 0.25 \\ 4x-1 & 0.25 \leq x \leq 0.5 \\ -4x+3 & 0.5 \leq x \leq 0.75 \\ 0 & 0.75 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Se calcula la $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de Sugeno del conjunto borroso B. Para cualquier α, $B_\alpha = [(\alpha+1)/4,\ (3-\alpha)/4]$ y $M(B_\alpha) = \frac{3-\alpha}{4} - \frac{\alpha+1}{4} = \frac{1-\alpha}{2}$. Como $\alpha_{max}=1$ entonces:

$$ME(B) = \text{Mín}(1,\ 1- \text{Sup}_{\alpha\in[0,\ 1]}\{\text{Mín}((1-\alpha)/2,\ \alpha)\})$$

$$= \text{Mín}(1,\ 1- \text{Sup}_{\alpha\in[0,\ 1]}(\begin{cases}\frac{1-\alpha}{2} & \frac{1}{3} \leq \alpha \leq 1\\ \alpha & 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{3}\end{cases}))$$

$$= \text{Mín}(1,\ 1-1/3) = 2/3.$$

Ejemplo 3.7.2.1.3

Se calcula esta $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* del conjunto borroso:

$$C(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 1-x & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Para cualquier α, $C_\alpha = [\alpha, 1-\alpha]$ y $M(C_\alpha) = 1-\alpha-\alpha = 1-2\alpha$ para α menor o igual a 0.5, y cero para α mayor que 0.5. Como α_{max}=0.5 entonces:

$$ME(C) = \text{Mín}(\frac{1}{2},\ 1- \text{Sup}_{\alpha\in[0,\ 1]} \{\text{Mín}(1-2\alpha,\ \alpha)\})$$

$$= \text{Mín}(\frac{1}{2},\ 1- \text{Sup}_{\alpha\in[0,\ 1]} (\begin{cases} 1-2\alpha & \frac{1}{3}\leq\alpha\leq\frac{1}{2} \\ \alpha & 0\leq\alpha\leq\frac{1}{3} \end{cases}))$$

$$= \text{Mín}(\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{3}) = \text{Mín}(\frac{1}{2},\frac{2}{3}) = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 3.7.2.1.4

Se calcula esta $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* del conjunto borroso:

$$D(x) = \begin{cases} 0 & 0\leq x\leq 0.25 \\ 2x-1/2 & 0.25\leq x\leq 0.5 \\ 3/2-2x & 0.5\leq x\leq 0.75 \\ 0 & 0.75\leq x\leq 1 \end{cases}$$

Para cualquier α, $D_\alpha = [\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2},\ \frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}]$ y $M(D_\alpha) = \frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}-\alpha$ para α menor o igual a 0.5, y cero para α mayor que 0.5. Como α_{max}=0.5 entonces:

$$ME(D) = \text{Mín}(\frac{1}{2},\ 1- \text{Sup}_{\alpha\in[0,\ 1]} \{\text{Mín}(\frac{1}{2}-\alpha,\ \alpha)\})$$

$$= \text{Mín}(\frac{1}{2},\ 1- \text{Sup}_{\alpha\in[0,\ 1]} (\begin{cases} \frac{1}{2}-\alpha & \frac{1}{4}\leq\alpha\leq\frac{1}{2} \\ \alpha & 0\leq\alpha\leq\frac{1}{4} \end{cases}))$$

$$= \text{Mín}(\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{4}) = \text{Mín}(\frac{1}{2},\frac{3}{4}) = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 3.7.2.1.5

Se calcula esta $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* del conjunto borroso:

$$\text{E(x)} = \begin{cases} 4x & 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4} \\ 4-4x & \frac{3}{4} \le x \le 1 \end{cases}$$

Para cualquier α, $E_\alpha = [\frac{\alpha}{4}, \frac{1-\alpha}{4}]$ y $M(E_\alpha) = 1-\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha}{4} = 1-\frac{\alpha}{2}$ para todo α.

Como $\alpha_{max}=1$ entonces:

$$\text{ME(E)} = \text{Mín}(1,\ 1-\text{Sup}_{\alpha\in[0,\,1]}\ \{\text{Mín}(1-\frac{\alpha}{2},\ \alpha)\})$$

$$= \text{Mín}(1,\ 1-\text{Sup}_{\alpha\in[0,\,1]}\ (\begin{cases} 1-\frac{\alpha}{2} & \frac{3}{4} \le \alpha \le 1 \\ \alpha & 0 \le \alpha \le \frac{3}{4} \end{cases}))$$

$$= \text{Mín}(1,\ 1-\frac{3}{4}) = \text{Mín}(1,\ \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}.$$

Observación 3.7.2.1

Se observa que los conjuntos borrosos A, B y E son normales con $B \subset A \subset E$. C y D no lo son, con $D \subset C$. Sus $\prec$-medidas borrosas de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* tienen la siguiente relación:

$$\text{ME(B)} > \text{ME(A)} > \text{ME(D)} = \text{ME(C)} > \text{ME(E)}.$$

Ejemplo 3.7.2.2:

Si T_1 es la t-norma producto y T_2 es la t-norma mínimo entonces:

$$\mathbf{ME(A) = \alpha_{max}.\ N(Sup}_{\alpha\in[0,1]}\ \mathbf{\{Mín(M(A_\alpha), \alpha)\}).}$$

Si N es la negación usual y M es la medida de *Lebesgue* entonces

$$\mathbf{ME(A) = \alpha_{max}.\ (1-Sup}_{\alpha\in[0,1]}\ \mathbf{\{Mín(M(A_\alpha), \alpha)\}).}$$

Se aplica para calcular la $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* de los conjuntos borrosos anteriores.

Ejemplo 3.7.2.2.1

$$A(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 0.5 \\ -2x+2 & 0.5 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$ME(A) = 1 - Sup_{\alpha\in[0,1]} \{Mín(1-\alpha, \alpha)\}$$

$$= 1 - Sup_{\alpha\in[0,1]} (\begin{cases} 1-\alpha & \alpha \geq 0.5 \\ \alpha & \alpha \leq 0.5 \end{cases}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 3.7.2.2.2

Se calcula la $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* para el conjunto borroso B:

$$B(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 0.25 \\ 4x-1 & 0.25 \leq x \leq 0.5 \\ -4x+3 & 0.5 \leq x \leq 0.75 \\ 0 & 0.75 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{ME(B)} = 1- \mathrm{Sup}_{\alpha\in[0,\,1]}\ \{\mathrm{Mín}(\frac{1-\alpha}{2},\ \alpha)\}$$

$$= 1- \mathrm{Sup}_{\alpha\in[0,\,1]}(\begin{cases} \frac{1-\alpha}{2} & \frac{1}{3}\le\alpha\le 1 \\ \alpha & 0\le\alpha\le\frac{1}{3} \end{cases}) = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Ejemplo 3.7.2.2.3

Se calcula esta $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* del conjunto borroso C:

$$\mathrm{C(x)} = \begin{cases} x & 0\le x\le 0.5 \\ 1-x & 0.5\le x\le 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{ME(C)} = \frac{1}{2}(1- \mathrm{Sup}_{\alpha\in[0,\,1]}\ \{\mathrm{Mín}(1-2\alpha,\ \alpha)\})$$

$$= \frac{1}{2}.(1- \mathrm{Sup}_{\alpha\in[0,\,1]}\ \{\begin{cases} 1-2\alpha & \frac{1}{3}\le\alpha\le\frac{1}{2} \\ \alpha & 0\le\alpha\le\frac{1}{3} \end{cases}))$$

$$= \frac{1}{2}.(1-\frac{1}{3})) = \frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ejemplo 3.7.2.2.4

Se calcula esta $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* del conjunto borroso D:

$$\mathrm{D(x)} = \begin{cases} 0 & 0\le x\le 0.25 \\ 2x-1/2 & 0.25\le x\le 0.5 \\ 3/2-2x & 0.5\le x\le 0.75 \\ 0 & 0.75\le x\le 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{ME(D)} = \frac{1}{2}.(1-\mathrm{Sup}_{\alpha\in[0,\,1]}\,\{\mathrm{Mín}(\frac{1}{2}-\alpha,\,\alpha)\})$$

$$= \frac{1}{2}.(1-\mathrm{Sup}_{\alpha\in[0,\,1]}\,(\begin{cases} 1/2-\alpha & \frac{1}{4}\leq\alpha\leq\frac{1}{2} \\ \alpha & 0\leq\alpha\leq\frac{1}{4}\end{cases}))$$

$$= \frac{1}{2}.(1-\frac{1}{4})) = \frac{1}{2}.\frac{3}{4} = \frac{3}{8}.$$

Ejemplo 3.7.2.2.5

Se calcula esta $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* del conjunto borroso E:

$$\mathrm{E(x)} = \begin{cases} 4x & 0\leq x\leq\frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4}\leq x\leq\frac{3}{4} \\ 4-4x & \frac{3}{4}\leq x\leq 1\end{cases}$$

$$\mathrm{ME(E)} = 1.(1-\mathrm{Sup}_{\alpha\in[0,\,1]}\,\{\mathrm{Mín}(1-\frac{\alpha}{2},\,\alpha)\})$$

$$= 1-\mathrm{Sup}_{\alpha\in[0,\,1]}\,(\begin{cases} 1-\frac{\alpha}{2} & \frac{3}{4}\leq\alpha\leq 1 \\ \alpha & 0\leq\alpha\leq\frac{3}{4}\end{cases}) = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Observación 3.7.2.2.1

Se observa que para los conjuntos borrosos normales A, B y E los valores obtenidos coinciden con los del ejemplo anterior. Tienen la siguiente relación:

$$\mathrm{ME(B)} > \mathrm{ME(A)} > \mathrm{ME(D)} > \mathrm{ME(C)} > \mathrm{ME(E)}.$$

Ejemplo 3.7.2.3:

Si T_1 es la t-norma de *Łukasiewicz* y T_2 es la t-norma mínimo entonces:

$$\mathbf{ME(A) = \alpha_{max} + N(Sup_{\alpha \in [0, 1]} \{Mín(M(A_\alpha), \alpha)\}) - 1.}$$

Si N es la negación usual y M es la medida de *Lebesgue* entonces

$$\mathbf{ME(A) = \alpha_{max} - Sup_{\alpha \in [0, 1]} \{Mín(M(A_\alpha), \alpha)\}.}$$

Se aplica para calcular la $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* de los conjuntos borrosos anteriores:

Ejemplo 3.7.2.3.1

$$A(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 0.5 \\ -2x+2 & 0.5 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$ME(A) = 1 - Sup_{\alpha \in [0, 1]} \{Mín\{(1-\alpha), \alpha\}\} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 3.7.2.3.2

Se aplica para el conjunto borroso B:

$$B(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 0.25 \\ 4x-1 & 0.25 \le x \le 0.5 \\ -4x+3 & 0.5 \le x \le 0.75 \\ 0 & 0.75 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$ME(B) = 1 - Sup_{\alpha \in [0, 1]} \{Mín(\frac{1-\alpha}{2}, \alpha)\} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Ejemplo 3.7.2.3.3

Se calcula esta $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* del conjunto borroso C:

$$C(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 0.5 \\ 1-x & 0.5 \le x \le 1 \end{cases}$$

$\mathrm{ME(C)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Ejemplo 3.7.2.3.4

Se calcula esta $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* del conjunto borroso D:

$$D(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 0.25 \\ 2x-1/2 & 0.25 \le x \le 0.5 \\ 3/2-2x & 0.5 \le x \le 0.75 \\ 0 & 0.75 \le x \le 1 \end{cases}$$

$\mathrm{ME(D)} = \frac{1}{2} - \mathrm{Sup}_{\alpha\in[0,\,1]} \{\mathrm{Mín}\{(\frac{1}{2}-\alpha),\, \alpha\}\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Ejemplo 3.7.2.3.5

Se calcula esta $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* del conjunto borroso E:

$$E(x) = \begin{cases} 4x & 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4} \\ 4-4x & \frac{3}{4} \le x \le 1 \end{cases}$$

$\mathrm{ME(E)} = 1 - \mathrm{Sup}_{\alpha\in[0,\,1]} \{\mathrm{Mín}(\frac{1-\alpha}{2},\, \alpha)\} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Observación 3.7.2.3.1

Para los conjuntos normales se obtienen los mismos valores que en los ejemplos 3.7.2.1 y 3.7.2.2, pero discrimina mejor que el ejemplo 3.7.2.2 la medida de los subconjuntos borrosos no normales. Se tiene la siguiente relación:

$$ME(B) > ME(A) > ME(E) = ME(D) > ME(C).$$

Observación 3.7.2.3.2

Esta es la más estricta de las $\prec$-medidas borrosas de especificidad de los ejemplos definidos mediante la integral de *Sugeno* pues Mín $\geq$ Prod $\geq$ W.

Ejemplo 3.7.2.4:

Si T_1 es la t-norma mínimo y T_2 es la t-norma producto entonces:

$$\mathbf{ME(A) = Min\{\alpha_{max}, N(Sup_{\alpha \in [0, 1]} \{ M(A_\alpha). \alpha\})\}.}$$

Si N es la negación usual y M es la medida de *Lebesgue* entonces

$$\mathbf{ME(A) = Min\{\alpha_{max}, 1-Sup_{\alpha \in [0, 1]} \{ M(A_\alpha). \alpha\}\}.}$$

Se aplica para calcular la $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* de los conjuntos borrosos anteriores:

Ejemplo 3.7.2.4.1

$$A(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 0.5 \\ -2x+2 & 0.5 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$ME(A) = Min\{1, 1- Sup_{\alpha\in[0, 1]} \{(1-\alpha).\alpha\}\} = Min\{1, 1-\frac{1}{4}\} = \frac{3}{4}.$$

Ejemplo 3.7.2.4.2

Se aplica esta medida sobre el conjunto borroso B:

$$B(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 0.25 \\ 4x-1 & 0.25 \le x \le 0.5 \\ -4x+3 & 0.5 \le x \le 0.75 \\ 0 & 0.75 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$ME(B) = Min\{1, 1- Sup_{\alpha\in[0, 1]} \{(1-\alpha).\frac{\alpha}{2}\}\} = Min\{1, 1- \frac{1}{8}\} = \frac{7}{8}.$$

Ejemplo 3.7.2.4.3

Se calcula esta $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* del conjunto borroso C:

$$C(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 0.5 \\ 1-x & 0.5 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$ME(C) = Mín\{\frac{1}{2}, (1- Sup_{\alpha\in[0, 1]} \{(1-2\alpha).\alpha\})\} = Mín\{\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{8}\} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 3.7.2.4.4

Se calcula esta $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* del conjunto borroso D:

$$D(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 0.25 \\ 2x-1/2 & 0.25 \le x \le 0.5 \\ 3/2-2x & 0.5 \le x \le 0.75 \\ 0 & 0.75 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{ME(D)} = \mathrm{Mín}\{\frac{1}{2},\ 1-\ \mathrm{Sup}_{\alpha\in[0,\,1]}\ \{(\frac{1}{2}-\alpha)\alpha\}\} = \mathrm{Mín}\{\frac{1}{2},\ 1-\ \frac{1}{16}\} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 3.7.2.4.5

Se calcula esta $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* del conjunto borroso E:

$$\mathrm{E(x)} = \begin{cases} 4x & 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4} \\ 4-4x & \frac{3}{4} \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{ME(E)} = \mathrm{Mín}\{1,\ 1-\ \mathrm{Sup}_{\alpha\in[0,\,1]}\ \{\frac{1-\alpha}{2}\alpha\}\} = \mathrm{Mín}\{1,\ 1-\frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}$$

Observación 3.7.2.4.1:

Esta medida no discrimina bien para conjuntos borrosos no normales, pues se tiene la siguiente relación:

$$\mathrm{ME(B)} > \mathrm{ME(A)} > \mathrm{ME(D)} = \mathrm{ME(C)} = \mathrm{ME(E)}.$$

Ejemplo 3.7.2.5:

Si T_1 y T_2 son la t-norma producto entonces:

$$\mathbf{ME(A) = \alpha_{max}.N(Sup_{\alpha\in[0,\,1]}\ \{\ M(A_\alpha).\ \alpha\}).}$$

Si N es la negación usual y M es la medida de *Lebesgue* entonces

$$\mathbf{ME(A) = \alpha_{max}-\alpha_{max}\ .Sup_{\alpha\in[0,\,1]}\ \{\ M(A_\alpha).\ \alpha\}.}$$

Se aplica para calcular la $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* de los conjuntos borrosos anteriores:

Ejemplo 3.7.2.5.1

$$A(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 0.5 \\ -2x+2 & 0.5 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$ME(A) = 1 - \text{Sup}_{\alpha \in [0,\, 1]} \{(1-\alpha).\alpha)\} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Ejemplo 3.7.2.5.2

Se aplica esta medida para el conjunto borroso B:

$$B(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 0.25 \\ 4x-1 & 0.25 \leq x \leq 0.5 \\ -4x+3 & 0.5 \leq x \leq 0.75 \\ 0 & 0.75 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$ME(B) = 1 - \text{Sup}_{\alpha \in [0,\, 1]} \{(1-\alpha).\frac{\alpha}{2}\} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Ejemplo 3.7.2.5.3

Se calcula esta $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* del conjunto borroso C:

$$C(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 1-x & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$ME(C) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ \frac{1}{8} = \frac{7}{16}.$$

Ejemplo 3.7.2.5.4

Se calcula esta $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* del conjunto borroso D:

$$D(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 0.25 \\ 2x - 1/2 & 0.25 \le x \le 0.5 \\ 3/2 - 2x & 0.5 \le x \le 0.75 \\ 0 & 0.75 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$ME(D) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\text{Sup}_{\alpha \in [0, 1]} \{(\frac{1}{2} - \alpha)\alpha\}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{16} = \frac{15}{32}.$$

Ejemplo 3.7.2.5.5

Se calcula esta $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* del conjunto borroso E:

$$E(x) = \begin{cases} 4x & 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4} \\ 4 - 4x & \frac{3}{4} \le x \le 1 \end{cases}$$

$$ME(E) = 1 - \text{Sup}_{\alpha \in [0, 1]} \{\frac{1-\alpha}{2}\alpha\} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Observación 3.7.2.5.1

Se tiene la siguiente relación:

$$ME(B) > ME(A) > ME(E) = ME(D) = ME(C).$$

Ejemplo 3.7.2.6:

Si T_1 es la t-norma de *Łukasiewicz* y T_2 es la t-norma producto entonces:

$$\mathbf{ME(A) = \alpha_{max} + N(Sup_{\alpha \in [0,1]} \{M(A_\alpha).\alpha\}) - 1.}$$

Si N es la negación usual y M es la medida de *Lebesgue* entonces

$$\mathbf{ME(A) = \alpha_{max} - Sup_{\alpha \in [0,1]} \{M(A_\alpha).\ \alpha\}.}$$

Se aplica para calcular la $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* de los conjuntos borrosos anteriores:

Ejemplo 3.7.2.6.1

$$A(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 0.5 \\ -2x+2 & 0.5 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$ME(A) = 1 - Sup_{\alpha \in [0,1]} \{(1-\alpha).\alpha\} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 3.7.2.6.2

Se calcula la $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* del conjunto borroso B:

$$B(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 0.25 \\ 4x-1 & 0.25 \le x \le 0.5 \\ -4x+3 & 0.5 \le x \le 0.75 \\ 0 & 0.75 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$ME(B) = 1 - Sup_{\alpha \in [0,1]} \{\frac{1-\alpha}{2}.\alpha\} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Ejemplo 3.7.2.6.3

Se calcula esta $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* del conjunto borroso C:

$$C(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 0.5 \\ 1-x & 0.5 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{ME(C)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Ejemplo 3.7.2.6.4

Se calcula esta $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* del conjunto borroso D:

$$D(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 0.25 \\ 2x - 1/2 & 0.25 \le x \le 0.5 \\ 3/2 - 2x & 0.5 \le x \le 0.75 \\ 0 & 0.75 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{ME(D)} = \frac{1}{2} - \mathrm{Sup}_{\alpha \in [0,\,1]} \{(\frac{1}{2} - \alpha).\alpha\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}.$$

Ejemplo 3.7.2.6.5

Se calcula esta $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* del conjunto borroso E:

$$E(x) = \begin{cases} 4x & 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4} \\ 4-4x & \frac{3}{4} \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{ME(E)} = 1 - \mathrm{Sup}_{\alpha \in [0,\,1]} \{\frac{1-\alpha}{2}.\ \alpha\} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Observación 3.7.2.6.1

Se tiene la siguiente relación:

$$ME(B) > ME(A) > ME(E) = ME(D) > ME(C).$$

Ejemplo 3.7.2.7:

Si T_2 es la t-norma de *Łukasiewicz* y T_1 es cualquiera de las t-normas mínimo, producto o *Łukasiewicz* y N es la negación usual entonces:

$$\mathbf{ME(A) = T_1\{\alpha_{max}, 1 - Sup_{\alpha\in[0,1]}\{ M(A_\alpha) + \alpha - 1\}\}.}$$

Si se aplica para calcular la $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* de los conjuntos borrosos anteriores, en los tres casos se obtiene lo mismo, pues $\text{Sup}_{\alpha\in[0,1]}\{M(A_\alpha)+\alpha-1\}$ es cero para A, B, C y D y $\frac{1}{2}$ para E. Luego:

$ME(A) = 1.$

$ME(B) = 1.$

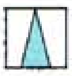
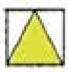
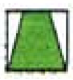
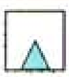
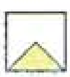
$ME(C) = 1.$

$ME(D) = 1.$

$ME(E) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

Tabla 3.7.2:

Se muestran los resultados obtenidos anteriormente sobre $\prec$-medida borrosa de especificidad sobre dominios continuos utilizando la integral de *Choquet* y la integral de *Sugeno*, siendo X=[0, 1] y N=1-x, en la siguiente tabla:

ME		Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3.7.2.1	Ejemplo 3.7.2.2	Ejemplo 3.7.2.3	Ejemplo 3.7.2.4	Ejemplo 3.7.2.5	Ejemplo 3.7.2.6	Ejemplo 3.7.2.7
		I. *Choquet* T_1=W	I. *Choquet* T_1=Prod	I. *Sugeno* T_1=Min T_2=Min	I. *Sugeno* T_1=Prod T_2=Min	I. *Sugeno* T_1=W T_2=Min	I. *Sugeno* T_1=Min T_2=Prod	I. *Sugeno* T_1=Prod T_2=Prod	I. *Sugeno* T_1=W T_2=Prod	I. *Sugeno* T_2=W
B		$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$	1
A		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	1
E		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
D		$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{7}{16}$	1
C		$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{8}$	1

Observación 3.7.2.7.1

Se observa que la $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando la integral de *Sugeno* más estricta es la del ejemplo 3.7.2.3, incluso más estricta que utilizando la integral de *Choquet*. Esto se verifica, no sólo en estos ejemplos, sino que es general ya que $T_1 = W \le Prod \le Min$ y $W \le Prod \le Min = T_2$. Es: $\mathbf{ME(A) = \alpha_{max} - Sup}_{\alpha\in[0,1]}\ \mathbf{\{Mín(M(A_\alpha), \alpha)\} = \alpha_{max}} - (S)\int_X A(w).dM(w)$. Y la menos estricta es la del ejemplo 3.7.2.7 que no discrimina diferencias entre cuatro de los cinco conjuntos borrosos.

3.8. MEDIDAS DE ESPECIFICIDAD BAJO INDISTINGUIBILIDADES.

3.8.1. Introducción

Las medidas de especificidad y las $\prec$-medidas borrosas de especificidad de un conjunto borroso o una distribución de posibilidad pueden ser utilizadas para medir el grado de utilidad de la información que contienen en un entorno de toma de decisiones. Cuando también se conoce una relación de T-indistinguibilidad sobre el producto cartesiano del conjunto universal se incrementa la cantidad de información disponible y, por lo tanto, también aumenta la tranquilidad en la toma de decisiones, pues la T-indistinguibilidad puede indicar que algunas de las decisiones posibles son similares y el número de clases de opciones puede ser menor que el de opciones.

Se comenta la definición y el ejemplo propuesto por *Yager* [Yager; 1991, 91] de medida de especificidad bajo una indistinguibilidad. Se observa que esta definición es buena para indistinguibilidades, pero no es válida para cualquier T-indistinguibilidad cuando T no es la t-norma mínimo ya que entonces el subconjunto de nivel α de la indistinguibilidad no es una relación de equivalencia clásica y por tanto la partición no está bien definida.

Para subsanar este problema se proponen unos axiomas que caractericen la medida de especificidad definida bajo una T-indistinguibilidad. Se encuentran algunos ejemplos y se ofrecen expresiones para dichas medidas utilizando t-normas, t-conormas y negaciones, comprobándose que los ejemplos propuestos anteriormente son casos particulares de esta expresión.

Como una relación de T-indistinguibilidad no define necesariamente una partición clásica del conjunto referencial se decide algorítmicamente, de dos formas distintas, las diferentes clases que sean independientes de inferencia, es decir, que un elemento de una clase no sea T-S-inferible a partir de los elementos de otra clase. Se define la medida de especificidad bajo una T-indistinguibilidad como la $\prec$-medida borrosa de especificidad de las clases independientes de inferencia.

3.8.2. Definición de medida de especificidad bajo T-similaridades.

Yager [Yager; 1991, 91] introdujo el concepto de especificidad bajo similaridades a través del problema de la chaqueta: considérese el problema de decidir qué chaqueta ponerse cuando se sabe que la temperatura es superior a 15°C. Esta información no es muy específica, pero puede indicar qué chaqueta ponerse con tranquilidad, es decir, es una información específica a la hora de decidirse por una chaqueta. Por ejemplo, supongamos que nos pondríamos un abrigo si la temperatura es inferior a 10°C, una chaqueta si está entre 10°C y 20°C y una camiseta si la temperatura es mayor de 20°C. En este entorno se podría tomar una decisión tranquilamente si se sabe que la temperatura es inferior a 10°C, o si está entre 10°C y 20°C, que no son informaciones específicas antes de conocer la similaridad que agrupa en tres clases a las temperaturas, pero sí lo son cuando la información está contenida en una de estas tres clases, permitiendo una decisión tranquila sobre la prenda de vestir que ponerse.

Para construir este nuevo tipo de medidas de especificidad, *Yager* utiliza el concepto de Min-indistinguibilidad o similaridad introducido por *Zadeh* [Zadeh; 1971].

Notación:

Una **T-indistinguibilidad** S es una relación borrosa sobre X×X que verifica las siguientes propiedades:

1. Reflexiva: $S(x, x) = 1$ para todo x en X
2. Simétrica: $S(x, y) = S(y, x)$ para todo x, y en X
3. T-transitiva: $T(S(x, y), S(y, z)) \leq S(x, z)$ para todo x, y, z en X

Se denomina **similaridad** a una Min-indistinguibilidad.

El subconjunto de nivel α de una relación de similaridad S es una relación de equivalencia clásica denotada S_α. Sea π_α el conjunto de clases de equivalencia de S para un nivel α dado. Sea μ_α/S el subconjunto de clases de equivalencia de π_α definido de la siguiente forma: La clase $\pi_\alpha(i)$ pertenece a μ_α/S si existe un elemento x contenido en $\pi_\alpha(i)$ y en el subconjunto de nivel μ_α.

Definición 3.8.2.1:

La definición de medida de especificidad de un conjunto borroso μ bajo una similaridad S de *Yager* [Yager; 1991, 91] es la siguiente:

$$\mathbf{S_p(\mu/S)} = \int_0^{\alpha_{max}} \frac{1}{Card(\mu_\alpha / S)} \, \mathbf{d\alpha}.$$

La medida de especificidad bajo similaridad es máxima si para todo α, μ_α esta contenida sólo en una clase de S_α.

Obsérvese que esta definición es buena para similaridades, pero no es válida para cualquier T-indistinguibilidad, pues cuando T no es la t-norma mínimo, el subconjunto de nivel α de S no es una relación de equivalencia y μ_α/S no está bien definido.

Las definiciones y los resultados siguientes son originales de esta memoria de doctorado:

A continuación se propone una definición de medida de especificidad o de especificidad bajo T-indistinguibilidades a través de un conjunto de axiomas

3.8.3. Axiomas de especificidad bajo T-indistinguibilidades.

Ya se ha mostrado cómo mediante una medida de especificidad sobre un conjunto borroso o una distribución de posibilidad, es posible medir un grado de utilidad de la información que contiene dicho conjunto. Cuando también se conoce una relación de indistinguibilidad aumenta la información y su especificidad, pues como algunas decisiones pueden ser similares, él número de clases de opciones puede ser menor que el de opciones y aumenta el grado de tranquilidad en la toma de decisiones. Ahora se quiere aportar un conjunto de axiomas que caracterice a estas medidas cuando se conoce una relación de T-indistinguibilidad.

Definición 3.8.3.1

Sea μ un conjunto borroso o una distribución de posibilidad (ver apéndice), sea $Sp(\mu)$ una medida de especificidad y sea S una T-indistinguibilidad. $Sp(\mu/S)$ en una **medida de especificidad bajo una T-indistinguibilidad** si:

1. $Sp(\{x\} / S) = 1$
2. $Sp(\varnothing / S) = 0$
3. $Sp(\mu / Id) = Sp(\mu)$
4. $Sp(\mu / S) \geq Sp(\mu)$

El primer axioma indica que si μ es un singletón entonces la medida de especificidad de μ bajo S es 1. Si S fuese una relación de equivalencia entonces se elegiría tranquilamente la clase que contiene al elemento x.

El segundo axioma muestra que cuando μ es el conjunto vacío entonces la especificidad de μ bajo S es 0. En este caso no se tiene información para tomar una decisión.

El tercer axioma impone que cuando S es la relación identidad entonces la especificidad de μ bajo S es igual a la especificidad de μ, pues cada elemento de X es una clase de S.

El cuarto axioma añade que cuando aumentamos nuestra información con una medida de T-indistinguibilidad, la medida de especificidad aumenta porque el número de clases entre las que decidir puede ser menor al de opciones cuando algunas de estas son similares.

3.8.4. Medidas de especificidad bajo T-indistinguibilidades basadas en fórmulas.

Sea X un conjunto referencial finito de *n* elementos $X=\{x_1, ..., x_n\}$. Sea μ un conjunto borroso o una distribución de posibilidad cuyos valores de pertenencia son $\mu(x_1)=a_1$, ..., $\mu(x_n)=a_n$, y $a_1 \geq ... \geq a_n$ y para simplificar la notación consideramos que los elementos ya están ordenados por su valor de pertenencia, siendo a_j es valor de pertenencia del j-ésimo elemento de μ con mayor grado de pertenencia. Sea $\{w_j\}$ un conjunto de pesos y sea S una T-indistinguibilidad.

Basándose en la medida de especificidad de *Yager* definida sobre un espacio finito X por $Sp(\mu) = a_1 - \sum_{j=2}^{n} w_j\, a_j$ se puede entender que los elementos a_j con $j \geq 2$ penalizan la especificidad porque la reducen. Las fórmulas propuestas que añaden una T-indistinguibilidad S recogen la idea de que si a_i es similar a a_1 entonces a_i no debería penalizar la especificidad porque está en la misma clase que a_1, es decir, conducirían a la misma decisión. De la misma manera, los elementos similares a otro que penaliza la especificidad ya no deberían reducir la medida de especificidad.

Definición 3.8.4.1

Una medida de especificidad Producto-lineal bajo una T-indistinguibilidad S se define como

$$\mathbf{Sp(\mu\ /\ S) = a_1 - \sum_{j=2}^{n} w_j\, a_j \prod_{i=1}^{j-1} (1 - S(x_i, x_j))}$$

Definición 3.8.4.2

Una medida de especificidad W-lineal bajo una T-indistinguibilidad S se define como

$$\mathbf{Sp(\mu\ /\ S) = a_1 - \sum_{j=2}^{n} w_j\, a_j\, (1 - Min(1, \sum_{i=1}^{j-1} S(x_i, x_j)))}$$

También se pueden definir medidas de especificidad bajo T-indistinguibilidades inspirándose en las conocidas medidas de especificidad de *Yager* definidas por:

$$\mathbf{Sp(\mu) = a_1 \prod_{j=2}^{n} (k a_j + (1 - a_j))\ donde\ k \in [0, 1),}$$

y utilizadas en las decisiones multicriterio, o la expresión más general definida en esta memoria:

$$\mathbf{Sp(\mu) = a_1 \prod_{j=2}^{n} (1-w_j a_j)) \text{ donde } w_j \in (0, 1]}$$

que se van a denominar producto-medidas de especificidad.

Definición 3.8.4.3

Se definen las producto-medidas de especificidad de tipo I bajo una T-indistinguibilidad S como:

$$\mathbf{Sp(\mu / S) = a_1 \prod_{j=2}^{n} (ka_j + (1-a_j \prod_{i=1}^{j-1} (1-S(x_i, x_j))))} \text{ donde } \mathbf{k \in [0, 1).}$$

Definición 3.8.4.4

Se definen las producto-medidas de especificidad de tipo 1 bajo una T-indistinguibilidad S como:

$$\mathbf{Sp(\mu) = a_1 \prod_{j=2}^{n} (1-w_j a_j \prod_{i=1}^{j-1} (1-S(x_i, x_j))} \text{ donde } \mathbf{w_j \in (0, 1]}$$

Definición 3.8.4.5

Se define la cociente-medida de especificidad bajo una T-indistinguibilidad S como:

$$\mathbf{Sp(\mu / S) = a_1 - (\sum_{j=2}^{n} w_j\, a_j / \sum_{i=1}^{j} (S(x_i, x_j))\,)}$$

3.8.5. *Medidas de especificidad bajo una T-indistinguibilidad utilizando t-normas, t-conormas y negaciones*

Se utilizan t-normas, t-conormas y negaciones para encontrar nuevas expresiones de medidas de especificidad bajo una T-indistinguibilidad.

Definición 3.8.5.1

Se define la (T_1, N_1, T_2*, T_3, T_4, N_2)-medida de especificidad de tipo 1 bajo una T-indistinguibilidad S como

$$\mathbf{ME(\mu/S) = T_1(a_1, N_1(T_2{}^*{}_{j=2,\ldots,n}\{(T_3(a_j, w_j, T_4{}_{\,i=1,..j-1}\{N_2(S(x_i, x_j))\}\}))}$$

Proposición 3.8.5.1

La (T_1, N_1, T_2*, T_3, T_4, N_2)-medida de especificidad de tipo 1 bajo una T-indistinguibilidad S definida por:

$$ME(\mu/S) = T_1(a_1, N_1(T_2{}^*{}_{j=2,..,n}\{(T_3(a_j, w_j, T_4{}_{\,i=1,..j-1}\{N_2(S(x_i, x_j))\}\}))$$

es igual a (T_1, N_1, T_2*, T_3, N_2, T^*_4)-medida de especificidad de tipo 1 bajo una T-indistinguibilidad S definida por:

$$ME(\mu/S) = T_1(a_1, N_1(T_2{}^*{}_{j=2,..,n}\{(T_3(a_j, w_j, N_2(T_4{}_{\,i=1,..j-1}\{S(x_i, x_j)\}))\})).$$

Demostración:

Si se sustituye la t-norma T_4 por su t-conorma dual T^*_4 conmutando con la negación, la demostración es trivial al ser $T_i\{N(a_i)\} = N(T^*_i\{a_i\})$. ∎

Se observa que las medidas de especificidad definidas en el apartado anterior son $\prec$-medidas borrosas de especificidad.

Ejemplo 3.8.5.1

La medida de especificidad Producto-lineal bajo una T-indistinguibilidad S de la definición 3.8.4.1 que se expresa como

$$\mathbf{Sp(\mu / S) = a_1 - \sum_{j=2}^{n} w_j\, a_j \prod_{i=1}^{j-1} (1 - S(x_i, x_j))}$$

es una (W, 1−x, W*, Prod, Prod, 1−x)-medida de especificidad bajo una T-indistinguibilidad S.

Ejemplo 3.8.5.2

La medida de especificidad Producto-lineal bajo una T-indistinguibilidad S de la definición 3.8.4.2 que se expresa como

$$\mathbf{Sp(\mu / S) = a_1 - \sum_{j=2}^{n} w_j\, a_j\, (1 - Min(1, \sum_{i=1}^{j-1} S(x_i, x_j)))}$$

es una (W, 1−x, W*, Prod, 1−x , W*)-medida de especificidad bajo una T-indistinguibilidad S, luego por la proposición anterior es una (W, 1−x, W*, Prod, W, 1−x)-medida de especificidad bajo una T-indistinguibilidad S.

Ejemplo 3.8.5.3

La (Prod, 1−x, Prod*, Prod, Prod, 1−x)-medida de especificidad bajo una T-indistinguibilidad S tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{ME(\mu / S) = a_1 \prod_{j=2}^{n} (1 - w_j\, a_j \prod_{i=1}^{j-1} (1 - S(x_i, x_j))).}$$

Ejemplo 3.8.5.4

La (Prod, 1–x, Prod*, Prod, W, 1–x)-medida de especificidad bajo una T-indistinguibilidad S tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{ME(\mu / S) = a_1 \prod_{j=2}^{n} (1 - w_j\, a_j\, (1 - Min(1, \sum_{i=1}^{j-1} S(x_i, x_j))))}.$$

Definición 3.8.5.2

Se define la (T_1, N_1, T_2*, T_3, T_5, T_4, N_2)-medida de especificidad de tipo II bajo una T-indistinguibilidad S como

$$\mathbf{ME(\mu / S) = T_1(a_1, N(T_2{}^*{}_{j=2,..,n}\{T_3(T_5(aj, T_4{}_{\,i=1,..j-1}\{N_2(S(x_i, x_j))\}), w_j)\})}$$

Notación

Para simplificar la notación se denomina:

$$P_\mu = N(T_2{}^*{}_{j=2,..,n}\{T_3(T_5(aj, T_4{}_{\,i=1,..j-1}\{N_2(S(x_i, x_j))\}), w_j)\}$$

que significa la penalización debida al conjunto borroso μ para otros valores de pertenencia distintos a a_1 al mayor de todos, y de denomina:

$$P_S = T_4{}_{\,i=1,..j-1}\{N_2(S(x_i, x_j))\}$$

que es lo que afecta la indistinguibilidad.

Lema 3.8.5.2:

La (T_1, N_1, T_2*, T_3, T_5, T_4, N_2)-medida de especificidad de tipo II bajo una T-indistinguibilidad S del conjunto vacío es cero

Demostración:

En efecto si a_j=0 para todo j, entonces a_1=0, luego:

$ME(\mu/S) = T_1(a_1, N(P_\mu)) = T_1(0, N(P_\mu)) = 0$. ∎

Lema 3.8.5.2:

Si el conjunto μ es un conjunto clásico con un único elemento, $\mu=A=\{x\}$, entonces su (T_1, N_1, T_2*, T_3, T_5, T_4, N_2)-medida de especificidad de tipo II bajo una T-indistinguibilidad S es uno.

Demostración:

Sea $\mu=A=\{x\}$ un conjunto clásico con un único elemento. Entonces $a_1=1$ y $a_j=0$ para todo j desde 2 hasta n, luego

$$\begin{aligned}
ME(A/S) &= T_1(a_1, N(P_A)) \\
&= T_1(1, N(P_A)) \\
&= N(P_A) \\
&= N(T_2*_{j=2,..,n}\{T_3(T_5(aj, T_{4\ i=1,..j-1}\{N_2(S(x_i, x_j))\}), w_j)\}) \\
&= N(T_2*_{j=2,..,n}\{T_3(T_5(0, P_S), w_j)\}) \\
&= N(T_2*_{j=2,..,n}\{T_3(0, w_j)\}) \\
&= N(T_2*_{j=2,..,n}\{0\}) \\
&= N(T_2*\{0, 0, ..., 0\}) \\
&= N(0) = 1. \blacksquare
\end{aligned}$$

Lema 3.8.5.4:

Si μ y ν son subconjuntos borrosos normales y $\mu\subset\nu$ entonces $ME(\mu/S) \geq ME(\nu/S)$.

Demostración:

La relación de indistinguibilidad es la misma, luego

$P_S = T_{4\ i=1,..j-1}\{N_2(S(x_i, x_j))\} = T_{4\ i=1,..j-1}\{N_2(S(x_i, x_j))\}$

Si a_j y b_j son los j-ésimos mayores valores de pertenencia de μ y ν respectivamente entonces como son normales $a_1=b_1=1$, y como $\mu\subset\nu$ se sabe que $a_j\leq b_j$ para todo j, luego

$T_5(a_j, P_S) \leq T_5(b_j, P_S)$, y por tanto

$T_3(T_5(a_j, P_S), w_j) \leq T_3(T_5(b_j, P_S), w_j)$ y

$T_2{}^*{}_{j=2,..,n}\{T_3(T_5(aj, P_S), w_j) \leq T_2{}^*{}_{j=2,..,n}\{T_3(T_5(bj, P_S), w_j)$.

$P_\mu = T_2{}^*{}_{j=2,..,n}\{T_3(T_5(aj, P_S), w_j) \leq T_2{}^*{}_{j=2,..,n}\{T_3(T_5(bj, P_S), w_j) = P_\nu$.

Por tanto $ME(\mu/S) = T_1(a_1, N(P_\mu)) = T_1(1, N(P_\mu)) = N(P_\mu) \geq N(P_\nu) = ME(\nu/S)$, y por tanto $ME(\mu/S) \geq ME(\nu/S)$. ∎

Teorema 3.8.5.5:

La $(T_1, N_1, T_2{}^*, T_3, T_5, T_4, N_2)$-medida de especificidad de tipo II bajo una T-indistinguibilidad S es una $\prec$-medida de especificidad

La demostración es consecuencia inmediata de los lemas 3.8.5.2, 3.8.5.3 y 3.8.5.4. ∎

Corolario 3.8.5.6:

Si A y B son subconjuntos clásicos no vacíos de X y card(A)≥card(B) entonces $ME(A/S) \leq ME(B/S)$.

Demostración:

Al ser A y B subconjuntos clásicos se tiene que $a_j=1$ para j desde 1 hasta m=card(A) y $a_j=0$ para j desde $m+1$ hasta n, y $b_j=1$ para j desde 1 hasta s=card(B) y $b_j=0$ para j desde $s+1$ hasta n, y $m\geq s$. Luego

$ME(A / S) = T_1(a_1, N(P_A))$

$= T_1(1, N(P_A))$

$= N(P_A) = N(T_2{*}_{j=2,..,n}\{T_3(T_5(aj, P_S), w_j))$

$= N(T_2{*}_{j=2,..,n}\{T_3(T_5(1,P_S),w_2),...,T_3(T_5(1,P_S),w_m),T_3(T_5(0,P_S),w_{m+1}),...,T_3(T_5(0,P_S), w_n)\})$

$= N(T_2{*}_{j=2,..,n}\{T_3(P_S,w_2),...,T_3(P_S,w_m),T_3(0\ w_{m+1}),...,T_3(0\ w_n)\})$

$= N(T_2{*}_{j=2,..,n}\ \{T_3(P_S,w_2),...,T_3(P_S,w_m), 0, ..., 0\}$

$\leq N(T_2{*}_{j=2,..,n}\ \{T_3(P_S,w_2),...,T_3(P_S,w_s), 0, ..., 0\}$

$= ME(B / S)$. ▮

Propiedad 3.8.5.7:

Si A es un subconjunto clásico con m elementos $1 < m \leq n$ y S es una relación de semejanza clásica donde los elementos x_i, ... x_j son elementos de A no relacionados con los anteriores, entonces:

$ME(A / S) = N(T_2{*}_{j=2,..,n}\ \{w_i, ..., w_j\})$

Demostración:

Al ser A un subconjunto clásico se tiene que a_j=1 para j desde 1 hasta m y a_j=0 para j desde m+1 hasta n, luego

$ME(A / S) = T_1(a_1, N(P_A))$

$= T_1(1, N(P_A))$

$= N(P_A) = N(T_2{*}_{j=2,..,n}\{T_3(T_5(aj, P_S), w_j))$

$= N(T_2{*}_{j=2,..,n}\{T_3(T_5(1,P_S),w_2),...,T_3(T_5(1,P_S),w_m),T_3(T_5(0,P_S),w_{m+1}),...,T_3(T_5(0,P_S), w_n)\})$

$= N(T_2{*}_{j=2,..,n}\{T_3(P_S, w_2),...,T_3(P_S,w_m), T_3(0, w_{m+1}),...,T_3(0, w_n)\})$

$= N(T_2*_{j=2,..,n} \{ T_3(P_S, w_2), ..., T_3(P_S,w_m), 0, ..., 0\})$

$= N(T_2*_{j=2,..,n} \{T_3(P_S, w_2), ..., T_3(P_S,w_m)\})$

$= N(T_2*_{j=2,..,n} \{w_i, ..., w_j\})$. ∎

Es conveniente que la medida de especificidad del conjunto universal X sea cero, pues el conjunto universal no es específico. Se analiza bajo que condiciones se verifica esta condición:

Propiedad 3.8.5.8:

Si A=X, S es una relación de semejanza clásica donde los elementos x_i, ... x_j son elementos de X no relacionados con los anteriores, y $Máx\{w_i, ..., w_j\} = 1$ entonces ME(X / S) = 0.

Demostración:

Si $T_2*_{j=2,..,n} \{w_i, ..., w_j\}=1$ ya estaría demostrado como corolario de la propiedad anterior, pues $ME(X / S) = N(T_2*_{j=2,..,n} \{w_i, ..., w_j\}) = N(1) = 0$.

Pero en cualquier caso si $Máx\{w_i, ..., w_j\}$ es igual a 1 por la relación de orden entre las t-conormas se tiene que

$ME(X / S) = N(T_2*_{j=2,..,n} \{w_i, ..., w_j\} \leq N(Max\{w_i, ..., w_j\}) = N(1) = 0$. ∎

Propiedad 3.8.5.9:

Si A=X, S es una relación de semejanza clásica donde los elementos x_i, ... x_j son elementos de X no relacionados con los anteriores, $T*_2$ es la t-conorma de *Łukasiewicz* y la suma de sus pesos es igual a uno, $\sum_{j=2}^{n} w_j=1$, entonces ME(X/S)=0

Demostración:

Si T_2^* es la t-conorma de *Łukasiewicz* entonces $T_2^*{}_{j=2,..,n}\ \{w_i, ..., w_j\} = \sum_{j=2}^{n} w_j$ y ME(A / S)= $T_1(1, N(T_2^*{}_{j=2..n}\{T_3(a_j, w_j)\})) = N(T_2^*{}_{j=2..n}\{w_i,...,w_j\}) = N(\sum_{j=2}^{n} w_j) = N(1) = 0$. ∎

Observación:

Es deseable que la (T_1, N_1, T_2^*, T_3, T_5, T_4, N_2)-medida de especificidad de tipo II bajo una indistinguibilidad S valga uno si y sólo si el conjunto A es un conjunto clásico con todos sus elementos similares. Sin embargo vale uno en otras ocasiones. Se analizan las condiciones que se deben imponer para poder garantizar esta propiedad:

Si se supone que ME(A / S) = 1, entonces $1 = T_1(a_1, N(P_A))$, por lo que si T_1 es una t-norma positiva debe ser $a_1=1$ y $N(P_A)=1$. Luego A es un subconjunto normal y si N es una negación fuerte entonces $P_A = 0 = T_2^*{}_{j=2,..,n}\{T_3(T_5(aj, P_S), w_j)\}$. Como T_2^* es una t-conorma, y el máximo es la menor de las t-conormas, para que P_A valga cero es preciso que para todo j mayor o igual a dos debe ser $T_3(T_5(aj, P_S), w_j) = 0$. Si los pesos fuesen cero no se podría garantizar nada. Si se supone que T_3 es una t-norma positiva y que el peso w_k que precisemos sea distinto de cero entonces $T_5(a_k, P_S) = 0$. Si se impone también que T_5 es una t-norma positiva entonces o a_k es igual a cero o P_S es igual a cero.

Si $0=P_S=T_4{}_{k=1,..j-1}\{N_2(S(x_k, x_j))\}$ y T_4 es positiva entonces $N_2(S(x_k, x_j))$ es igual a cero, y si N_2 es una negación fuerte $S(x_k, x_j) = 1$, lo que indica que a_k es similar a algún a_j, con j<k.

Pero también puede valer cero si alguna t-norma T no es positiva, (con *Min* o *Prod* no habría problemas pero sí con una t-norma de la familia de

Łukasiewicz), pero habría que analizar que otras condiciones habría que imponer.

Definición 3.8.5.3:

Una (T_1, N_1, T_2*, T_3, T_5, T_4, N_2)-medida de especificidad de tipo II bajo una indistinguibilidad S es **adecuada** si el único conjunto borroso que verifica que su (T_1, N_1, T_2*, T_3, T_5, T_4, N_2)-medida de especificidad de tipo II bajo una indistinguibilidad S es uno es el conjunto clásico con todos sus elementos similares

Lema 3.8.5.10:

Si las t-normas T_3, T_5 y T_4 son positivas, las negaciones N_1 y N_2 son negaciones fuertes y el peso w_k del a_k tal que $S(x_k, x_j)<1$ para todo $j<k$, es distinto de cero entonces la (T_1, N_1, T_2*, T_3, T_5, T_4, N_2)-medida de especificidad de tipo II bajo una indistinguibilidad S es **adecuada**.

Demostración:

Si ME(A / S) = 1 entonces $1 = T_1(a_1, N(P_A))$, por lo que debe ser a_1=1 y $N(P_A)=1$. Por tanto A es un subconjunto borroso normal y

$P_A = 0 = T_2{}^*{}_{j=2,..,n}\{T_3(T_5(aj, P_S), w_j)\}$,

lo que significa que para todo j mayor o igual a dos debe ser $T_3(T_5(aj, P_S), w_j)=0$. Como por hipótesis T_3 es una t-norma positiva debe ser o $T_5(aj, P_S)=0$ o w_j =0. Al ser w_k distinto de cero debe ser $T_5(a_k, P_S)=0$, y si Ps es distinto de cero entonces $a_k=0$. Y al estar ordenados los valores de pertenencia el resto de los valores de pertenencia también se anulan. Por tanto A es un subconjunto clásico con todos sus elementos similares. ▮

Lema 3.8.5.11:

Si la t-norma T_3 es de la familia de *Łukasiewicz* y el peso w_2 es igual a uno entonces la (T_1, N_1, T_2*, T_3, T_5, T_4, N_2)-medida de especificidad de tipo II bajo una indistinguibilidad S es **adecuada**.

Demostración:

Si ME(A/S) = 1 A debe ser un subconjunto borroso normal y para todo j mayor o igual a dos debe ser $T_3(a_j, w_j)=0$, y en particular $T_3(a_2, w_2)=0$. Si T_3 es una t-norma de la familia de *Łukasiewicz* entonces $T_3(x, y)=\varphi^{-1}(W(\varphi(x), \varphi(y)))$ siendo $W(x, y)=Máx\{0, x+y-1\}$ y φ una función continua creciente definida en [0, 1] con $\varphi(0)=0$ y $\varphi(1)=1$, luego:

$0= T_3(a_2, w_2)= \varphi^{-1}(Máx\{0, \varphi(a_2)+\varphi(w_2) -1\}) = \varphi^{-1}(Máx\{0, \varphi(a_2)\})$ ya que como $w_2=1$ entonces $\varphi(w_2)=1$. Por tanto $Máx\{0, \varphi(a_2)\}=0$, luego $\varphi(a_2)=0$, por lo que debe ser $a_2=0$. Y al estar ordenados los valores de pertenencia el resto de los valores de pertenencia también valen cero. Por tanto A es un subconjunto clásico de un único elemento. ∎

Teorema 3.8.5.12:

Si el peso w_2 es distinto de cero y la t-norma T_3 es positiva o si a t-norma T_3 es de la familia de *Łukasiewicz* y el peso w_2 es igual a uno, entonces la medida definida por $ME(A/S) = T_1(a_1, N(S_{j=2,...,d}\{T_3(a_j, w_j)\}))$ es una medida de especificidad.

La demostración es consecuencia inmediata de los lemas 3.8.5.2, 3.8.5.3, 3.8.5.4, 3.8.5.10 y 3.8.5.11. ∎

Observación:

Si la t-norma T_5 es igual a la t-norma T_3 entonces, por la asociatividad de las t-normas, la medida de (T_1, N_1, T_2*, T_3, T_5, T_4, N_2)-medida de especificidad de tipo II bajo una indistinguibilidad S coincide con la medida de (T_1, N_1, T_2*,

T_3, T_4, N_2)-medida especificidad de tipo I bajo una indistinguibilidad S. Luego estas medidas al ser un caso particular de las anteriores verifican todas las propiedades demostradas.

3.8.6. Medidas de especificidad bajo T-indistinguibilidades basadas en la especificidad de sus clases independientes de inferencia.

Dada una medida de especificidad sobre un conjunto borroso o distribución de posibilidad es posible medir la utilidad de la información que contienen para la toma de una decisión, pues la medida indicaría la cuantía de buenas decisiones posibles. Cuando también se conoce una T-indistinguibilidad un grupo de buenas decisiones podrían ser de la misma clase de T-indistinguibilidad por lo que el número de posibles buenas soluciones se reduciría y la especificidad aumenta, pues la decisión es más fácil.

Por ejemplo, supongamos que una empresa de informática quiere contratar un administrador de sistemas y tiene 30 candidatos. Una T-indistinguibilidad entre los candidatos sobre los entornos en los que tienen experiencia indicaría que 10 de ellos son expertos en microinformática, otros 10 son expertos en sistemas intermedios y los 10 restantes son expertos en grandes sistemas. Entonces la decisión inmediata no es cuál es el mejor de los 30 candidatos, sino cuál es la clase de perfil que se necesita, por lo que la decisión primera sería elegir una de las tres clases.

Volviendo al problema de la chaqueta de *Yager*, una T-indistinguibilidad aumenta la cantidad de información y por tanto la especificidad, pues varias temperaturas son similares o T-indistinguibles a la hora de decidir qué chaqueta ponerse.

Cuando nuestro conjunto borroso nos da una información sobre un espacio X, que podría no ser específica inicialmente, pero si dicho conjunto está contenido en una clase seleccionada de una T-indistinguibilidad entonces su especificidad es la máxima.

Un método nuevo y diferente de construir medidas de especificidad bajo T-indistinguibilidades consiste en construir el conjunto de clases de la T-indistinguibilidad y su distribución de posibilidad, para posteriormente medir su especificidad o $\prec$-especificidad.

Sin embargo, cuando la T-indistinguibilidad S no es una relación de equivalencia clásica, estas clases no están perfectamente definidas. Si T es la t-norma mínimo entonces sus subconjuntos de nivel α son relaciones de equivalencia clásicas, pero esta propiedad no se verifica para otras t-normas.

La idea de este método consiste en construir un conjunto de clases que sean 'independientes de inferencia', es decir, un conjunto de clases de forma que no se puedan inferir unas de otras por inferencia borrosa mediante la t-norma T.

Definición 3.8.6.1

Sea μ un conjunto borroso o distribución de posibilidad sobre un espacio finito $X=\{x_1, \ldots, x_n\}$, sea S una T-indistinguibilidad sobre X×X, entonces la **distribución de posibilidad de la clase de un elemento x_i** es:

$$\mathfrak{I}(x_i) = \mathrm{Max}_j(T(\mu(x_j), S(x_i, x_j))).$$

Proposición 3.8.6.1

$\mathfrak{S}(x_i) \geq \mu(x_i)$

Demostración:

$\mathfrak{S}(x_i) = \mathrm{Max}_j(T(\mu(x_j), S(x_i, x_j)))$

$\geq T(\mu(x_i), S(x_i, x_i))$

$= T(\mu(x_i), 1) = \mu(x_i)$. ▮

Definición 3.8.6.2:

x_i μ-T-S-representa la clase de x_j, y se denota $\mathbf{x_i \succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S} x_j}$, si

$$\mathbf{x_i \succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S} x_j \Leftrightarrow T(\mu(x_i), S(x_i, x_j))) \geq \mu(x_j).}$$

Esta definición indica lo que es posible deducir de x_j a partir de x_i haciendo inferencia borrosa con la t-norma T y la T-indistinguibilidad S, y que esto es lo mismo o más que lo que inicialmente se conocía de x_j. Es decir, ahora es posible deducir más de x_j por su relación con x_i.

Proposición 3.8.6.2:

Sea μ un conjunto borroso o distribución de posibilidad sobre un espacio finito $X=\{x_1, ..., x_n\}$, sea S una T-indistinguibilidad sobre $X\times X$, entonces $x_i \succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S} x_i$, es decir, la relación clásica $\succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S}$ sobre $X\times X$ es reflexiva.

Demostración

$T(\mu(x_i), S(x_i, x_i))) = T(\mu(x_i), 1) = \mu(x_i)$, luego $x_i \succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S} x_i$. ▮

Teorema 3.8.6.3:

Sea μ un conjunto borroso o distribución de posibilidad sobre un espacio finito $X=\{x_1, ..., x_n\}$, sea S una T-indistinguibilidad sobre $X\times X$, entonces la relación crisp $\succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S}$ sobre X×X es transitiva. Es decir, si $x_i \succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S} x_j$ y $x_j \succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S} x_k$ entonces $x_i \succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S} x_k$.

Demostración:

$x_i \succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S} x_j$ por lo tanto $T(\mu(x_i), S(x_i, x_j)) \geq \mu(x_j)$.

$x_j \succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S} x_k$ por lo que $T(\mu(x_j), S(x_j, x_k)) \geq \mu(x_k)$.

Luego $\mu(x_k) \leq T(\mu(x_j), S(x_j, x_k))$

$\leq T(T(\mu(x_i), S(x_i, x_j)), S(x_j, x_k))$ (T es asociativa)

$= T(\mu(x_i), T(S(x_i, x_j), S(x_j, x_k))$ (S es T-transitiva)

$\leq T(\mu(x_i), S(x_j, x_k))$

y por lo tanto $x_i \succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S} x_k$. ∎

Corolario 3.8.6.4:

La relación clásica $\succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S}$ sobre X×X es una relación de preorden clásica sobre X×X.

3.8.7 Algoritmo para obtener clases independientes de inferencia.

La distribución de posibilidad de las clases de los elementos $\{x_1, ..., x_n\}$ se calcula aplicando la regla composicional de inferencia Max-T entre la distribución de posibilidad y la T-indistinguibilidad. Es decir, la distribución de posibilidad de las clases de los elementos $\{x_1, ..., x_n\}$ es $\mu \circ_{Max\text{-}T} S = (\Im(x_1), ..., \Im(x_n))$. Para simplificar la notación se considera que dichos elementos ya están ordenados por sus valores de pertenencia; es decir, $\mu(x_1) \geq ... \geq \mu(x_n)$.

Varios de estos valores $\Im(x_i)$ pueden ser iguales, por ejemplo, en el caso de que dos elementos x_i y x_j estén relacionados en un sentido por la relación crisp $\succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S}$ se tendría que $\Im(x_i)$ es igual a $\Im(x_j)$.

El algoritmo que se propone tiene como objetivo eliminar los valores de $\Im(x_j)$ que son iguales a un $\Im(x_i)$ porque exista un x_i que μ-T-S-representa la clase de x_j (es decir, porque $x_i \succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S} x_j$) para encontrar los elementos que representan todas las clases independientes de inferencia y calcular la especificidad del conjunto de estos elementos que representan a sus clases.

El teorema anterior que demuestra que la relación $\succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S}$ es transitiva es importante para este algoritmo, pues cuando un elemento x_j es representado por otro elemento x_i, se puede eliminar sin temor a deshacerse de un x_j que representa a otro x_k, pues x_i también representa a x_k.

La distribución de posibilidad de la clase de un elemento x_j es $Max_j(T(\mu(x_i), S(x_i, x_j))) = T(\mu(x_i), S(x_i, x_j))$ para algún i. Si $i \neq j$, entonces x_i representa la clase de x_i.

El algoritmo debe detectar y eliminar los elementos x_j cuando exista otro elemento que represente a su clase para obtener un conjunto X' de elementos que representan a sus clases ($X' \subseteq X$). La medida de especificidad de μ sobre la T-indistinguibilidad S se calcula con la especificidad de la distribución de posibilidad de las clases $\Im$ de los elementos de X'.

Se propone un sencillo método por pasos de este algoritmo:

- **Paso 1: Calcular $\mu \circ_{Max-T} S(*, x_1)$.**

  Si $Max_j(T(\mu(x_j), S(x_j, x_1))) \geq \mu(x_1)$ para algún $j \neq 1$ entonces $X^1 := X - \{x_1\}$, y μ^1 y S^1 son la restricción a X^1 de μ y S.

  En otro caso $X^1 = X$ y x_1 será el representante de su clase y será un elemento de $X / \succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S}$.

- **Paso i: Calcular $\mu \circ_{Max-T} S(*, x_i)$.**

  Si $Max_j(T(\mu^{i-1}(x_j), S^{i-1}(x_j, x_i))) \geq \mu^{i-1}(x_i)$ para algún $j \neq i$ entonces $X^i = X^{i-1} - \{x_i\}$, y en otro caso $X^i = X^{i-1}$.

  Repetir el proceso n veces y X^n será el conjunto de clases del conjunto cociente $X / \succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S}$ y su distribución de posibilidad es $\Im$ restringida a X^n.

Así pues, **la medida de especificidad de μ bajo S es la medida de especificidad del conjunto de clases $X^n = X / \succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S}$ cuya distribución de posibilidad es $\Im$ restringida a X^n .**

Obsérvese que $X / \succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S}$ no es una relación de equivalencia sobre X porque la relación $\succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S}$ no es conmutativa. Sin embargo $X / \succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S}$ está bien definida por el mínimo conjunto de elementos $\succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S}$-representantes de otros elementos de X.

Teorema 3.8.7.1

La medida de especificidad de μ bajo S calculada por el algoritmo propuesto verifica los cuatro axiomas que definen una medida de especificidad bajo una T-indistinguibilidad.

Demostración

Axioma 1: Se demuestra que $Sp(\{x\} / S) = 1$. Si μ es un singletón entonces $\mu(x_1)=1$ y $\mu(x_j)=0$ para todo $j\neq 1$. En el paso 1 del algoritmo se calcula

$$\mu \circ_{Max\text{-}T} S(*, x_1) = (1, 0,\ldots,0) \circ_{Max\text{-}T} \begin{pmatrix} S(x_1, x_1) \\ S(x_2, x_1) \\ \vdots \\ S(x_n, x_1) \end{pmatrix}$$

$$= T(1, S(x_1, x_1)) = T(1, 1) = 1$$

Como x_1 es el representante de su clase será un elemento de $X / \succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S}$, $X^1 = X$ y $\Im(x_1) = 1$.

En el paso i, para todo i mayor que 1, se calcula

$$\mu \circ_{Max\text{-}T} S(*, x_i) = (1, 0,\ldots,0) \circ_{Max\text{-}T} \begin{pmatrix} S(x_1, x_i) \\ S(x_2, x_i) \\ \vdots \\ S(x_n, x_i) \end{pmatrix}$$

$$= T(1, S(x_1, x_i))$$

$$= S(x_1, x_i)$$

$$\geq \mu^{i-1}(x_i) = 0$$

por lo que x_i es representado por la clase de x_1 para todo $i \neq 1$, $X^n = X / \succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S} = \{x_1\}$ y la medida de especificidad de $X / \succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S}$ es uno por ser un singletón.

Axioma 2: Se demuestra que Sp(∅ / S) = 0. En todos los pasos del algoritmo se tiene que

$$\mu \circ_{Max\text{-}T} S(*, x_i) = (0, ..., 0) \circ_{Max\text{-}T} \begin{pmatrix} S(x_1, x_i) \\ S(x_2, x_i) \\ \vdots \\ S(x_n, x_i) \end{pmatrix}$$

$$= T(0, S(x_i, x_i)) = 0,$$

por lo que $X^n = X / \succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S} = X$, pero la distribución de posibilidad de las clases es $\mathfrak{I}(x_i) = 0$ para todo i, por lo que la medida de especificidad del conjunto vacío sobre S es la medida de especificidad del conjunto vacío, por lo que vale cero.

Axioma 3: Se demuestra que Sp(μ / Id) = Sp(μ). Cuando la T-indistinguibilidad S es la Identidad, en todos los pasos se tiene que

$$\mu \circ_{Max\text{-}T} S(*, x_i) = (x_1, ..., x_n) \circ_{Max\text{-}T} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= T(x_i, 1) = x_i,$$

por lo que cada elemento representa a su clase, $X^n = X / \succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S} = X$, y $\mathfrak{I}$ es igual a μ, por lo que la medida de especificidad del conjunto μ sobre la relación identidad es la medida de especificidad del conjunto μ.

Axioma 4: Se demuestra que Sp(μ / S) ≥ Sp(μ).

En el paso 1 del algoritmo, como x_1 es el mayor valor de pertenencia de μ, se tiene que

$$\mu \, o_{\text{Max-T}} \, S(*, x_1) \quad = (x_1, .., x_n) \, o_{\text{Max-T}} \begin{pmatrix} S(x_1, x_1) \\ S(x_2, x_1) \\ \vdots \\ S(x_n, x_1) \end{pmatrix}$$

$$= T(x_1, S(x_1, x_1)) = T(x_1, 1) = x_1.$$

Como x_1 siempre es el representante de su clase será un elemento de $X / \succeq_{\mu\text{-T-S}}$, $X^1 = X$ y $\Im(x_1) = x_1$.

En el paso i, para todo i mayor que 1, se calcula

$$\mu \, o_{\text{Max-T}} \, S(*, x_i) = (x_1, .., x_n) \, o_{\text{Max-T}} \begin{pmatrix} S(x_1, x_i) \\ S(x_2, x_i) \\ \vdots \\ S(x_n, x_i) \end{pmatrix} = \Im(x_i)$$

Si $\Im(x_i)$ es $T(x_i, S(x_i, x_i)) = T(x_i, 1) = x_i$ entonces el elemento x_i es representante de su clase y $Sp(\mu / S)$ no variaría con respecto a $Sp(\mu)$.

Si $\Im(x_i)$ es $T(x_j, S(x_j, x_i))$ entonces x_i es representado por x_j, por lo que no pertenece a $X / \succeq_{\mu\text{-T-S}}$ así pues la medida de especificidad $Sp(\mu / S)$ es la medida de especificidad de $\Im$ restringida a X^n, que no contiene a x_i. Al disminuir el número de elementos que no son el de mayor grado de pertenencia, la medida de especificidad $Sp(\mu / S)$ aumenta respecto a $Sp(\mu)$. ∎

Ejemplo 3.8.7.1

Sea μ el conjunto borroso sobre $X=\{x_1, .., x_5\}$ con los valores de pertenencia $\{1/x_1, 0.7/x_2, 0.5/x_3, 0.2/x_4. 0/x_5\}$. Supongamos que aumentamos nuestro conocimiento a través de la información que nos proporciona la T-Indistinguibilidad $S:X \times X \to [0, 1]$ representada por la siguiente matriz

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0.5 & 0.2 \\ 1 & 1 & 0 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0 & 0.2 & 1 \end{pmatrix},$$

que es reflexiva y Min-transitiva, por lo que es T-transitiva para toda t-norma T.

Sea T la t-norma mínimo. La distribución de posibilidad de las clases $\mathfrak{S}$ de los elemento de X es la siguiente

$$\mu \circ_{\text{Max-Min}} S \quad = (1, 0.7, 0.5, 0.2, 0) \circ_{\text{Max-Min}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0.5 & 0.2 \\ 1 & 1 & 0 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1, 1, 0.5, 0.5, 0.2)$$

Para decidir que clases son independientes de Min-inferencia se siguen los pasos del algoritmo.

En el **paso 1** se calcula

$$\mu \circ_{\text{Max-Min}} S(*, x_1) = (1, 0.7, 0.5, 0.2, 0) \circ_{\text{Max-Min}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$= \text{Max}\{1, 0.7, 0, 0.2, 0\} = 1.$$

Como $1 = \text{Max}(T(\mu(x_1), S(x_1, x_1))) = \mu(x_1)$, x_1 será el representante de su propia clase y será un elemento de $X / \geq_{\mu\text{-Min-S}}$. Se tiene $X^1 = X$, $\mu^1 = \mu$ y $S^1 = S$.

En el **paso 2** se calcula

$$\mu^1 \circ_{\text{Max-T}} S^1(*, x_2) = (1, 0.7, 0.5, 0.2, 0) \circ_{\text{Max-Min}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$= \text{Max}\{1, 0.7, 0, 0.2, 0\} = 1.$$

Como $1 = \text{Max}(T(\mu^1(x_1), S^1(x_1, x_2))) \geq \mu^1(x_2)$ entonces $x_1 \succeq_{\mu\text{-Min-S}}$ representa a x_2, por lo que $X^2 = X^1 - \{x_2\} = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}$, μ^2 es μ^1 restringido a X^1 y

$$S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

en $X^2 \times X^2$, es decir en $\{x_1, x_3, x_4, x_5\}^2$.

En el **paso 3** se calcula

$$\mu^2 \circ_{\text{Max-T}} S^2(*, x_3) = (1, 0.5, 0.2, 0) \circ_{\text{Max-Min}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{Max}\{0, 0.5, 0, 0\} = 0.5.$$

Como $0.5 = \mu(x_3)$, x_3 será el representante de su clase y será un elemento de $X / \succeq_{\mu\text{-Min-S}}$. Se tiene $X^3 = X^2$, $\mu^3 = \mu^2$ y $S^3 = S^2$.

En el **paso 4** se calcula

$$\mu^3 \circ_{Max\text{-}T} S^3(*, x_4) = (1, 0.5, 0.2, 0) \circ_{Max\text{-}Min} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \text{Max}\{0.5, 0, 0.2, 0\} = 0.5.$$

Como $0.5 = \text{Max}(T(\mu^3(x_1), S^3(x_1, x_4))) \geq \mu^3(x_4) = 0.2$ entonces $x_1 \succeq_{\mu\text{-Min-S}}$ representa a x_4, por lo que $X^4 = X^3\text{-}\{x_4\} = \{x_1, x_3, x_5\}$, μ^4 es μ^3 restringido a X^4 y

$$S^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en $X^4 \times X^4$.

En el **paso 5** se calcula

$$\mu^4 \circ_{Max\text{-}T} S^4(*, x_5) = (1, 0.5, 0) \circ_{Max\text{-}Min} \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{Max}\{0.2, 0, 0\} = 0.2.$$

Como $0.2 = \text{Max}(T(\mu^3(x_1), S^4(x_1, x_5))) \geq \mu^4(x_5) = 0$ entonces $x_1 \succeq_{\mu\text{-Min-S}}$ representa a x_5, $X^5 = X^4\text{-}\{x_5\} = \{x_1, x_3\}$, que es el conjunto de clases de $X / \succeq_{\mu\text{-}T\text{-}S}$ ya que las clases independientes de inferencia son dos: $\{\{x_1, x_2, x_4, x_5\}, \{x_3\}\}$, y por tanto su distribución de posibilidad es $\mathfrak{I}$ restringida a X^5, es decir, $\{1/x_1, 0.5/x_3\}$.

Así pues, **la medida de especificidad de μ bajo la indistinguibilidad S es la medida de especificidad del conjunto de clases de x_1 y x_3 con distribución de posibilidad $\{1/x_1, 0.5/x_3\}$.**

A partir del elemento x_1 se puede deducir mediante la regla composicional de inferencia Max-Min mayores grados de pertenencia para los valores x_2, x_4 y x_5 de lo que nos indicaba μ inicialmente, por lo que x_2, x_4 y x_5

son Min-S-inferibles a partir de x_1 y estas 4 decisiones son similares.

Evidentemente, la medida de especificidad de μ bajo la indistinguibilidad S es mayor que la de μ, pues la indistinguibilidad nos indica que 4 de las 5 posibles decisiones iniciales son similares, por lo que la decisión se reduce a dos clases de elementos.

Utilizando, por ejemplo, la medida de especificidad lineal de Yager con un peso $w_2 = 1$, tendríamos que la medida de especificidad de μ bajo S sería:

$$Sp\ (\mu\ /\ S) = Sp\ (\{1/x_1,\ 0.5/x_3\}) = 1 - 0.5 = 0.5.$$

CAPÍTULO 4:

NUEVA MEDIDA DE T-TRANSITIVIDAD DE RELACIONES BORROSAS.

4.1. INTRODUCCIÓN

Para que una relación borrosa sea un T-preorden o una T-similaridad necesita verificar la propiedad T-transitiva. Los T-preórdenes son muy importantes en el mundo de la inferencia borrosa, por ejemplo, para que las consecuencias inferidas sean consecuencias según *Tarski*. Las T-similaridades o T-indistinguibilidades permiten de forma análoga a las relaciones de equivalencia clásicas, hacer clasificaciones o particiones borrosas de un conjunto. Por esto es importante conocer si una relación dada es T-transitiva, y si no lo es buscar otra, lo más próxima posible, que lo sea.

En este capítulo se presenta un nuevo método algorítmico para T-transitivizar relaciones borrosas, es decir, partiendo de una relación borrosa se proporciona un método para obtener una relación borrosa lo más parecida posible a la dada, contenida en la original y que sea T-transitiva. Este método permite también conocer si la relación dada es ya T-transitiva.

Existen varias maneras conocidas de obtener el acreditado cierre T-transitivo de una relación borrosa, pero el algoritmo propuesto no es una de ellas, pues el cierre transitivo de una relación borrosa alcanza mayores valores de pertenencia que la relación original, mientras que la salida de este nuevo algoritmo proporciona valores más bajos.

Tanto el cierre T-transitivo (que contiene a la relación borrosa original) como la nueva relación T-transitivizada (que esta contenida en la original) conservan importantes propiedades de la relación, como por ejemplo la μ-T-condicionalidad y la α-reflexividad. Por ejemplo, si la relación borrosa es reflexiva, entonces su relación T-transitizada también será reflexiva y adquirirá la propiedad T-transitiva, por lo que será un T-preorden.

El método propuesto de T-transitivización puede usarse como una manera nueva de medir la T-transitividad de relaciones borrosas, pero también sirve para construir T-preórdenes distintos del cierre transitivo de dicha relación reflexiva.

El algoritmo no siempre conserva la propiedad de la simetría, por lo que no serviría para construir T-indistinguibilidades a partir de una relación reflexiva y simétrica. Sin embargo no es difícil obtener la mayor relación posible reflexiva, simétrica y T-transitiva contenida en una relación borrosa.

Una vez se tiene este algoritmo se definen medidas de T-transitividad de relaciones borrosas midiendo la diferencia entre la relación borrosa original y su relación T-transitivizada mediante distancias o distancias generalizadas, obteniendo una medida diferente a la que se obtendría midiendo la distancia entre la relación y su cierre T-transitivo.

En este capítulo se prueba que el nuevo algoritmo de T-transitivización de relaciones borrosas es computable si el universo de la relación es finito.

4.2. PRELIMINARES

Sea $E = \{a_1, ..., a_n\}$ un conjunto finito. Se recuerda que J^T es la relación residuada. (Ver apéndice)

Definición 4.1.1:

Sea T una t-norma triangular. Una relación borrosa $R: E \times E \to [0, 1]$ es **T-transitiva** si $T(R(a,b), R(b,c)) \leq R(a,c)$ para todo a, b, c de E.

Notación:

Dada una relación borrosa R se denomina $a_{i,j}$ al elemento de [0, 1] que denota la relación entre a_i y a_j. Así $a_{i,j} = R(a_i, a_j)$

Definición 4.1.2:

Un elemento $a_{i,j}$ se llamará **elemento T-transitivo** si $T(a_{i,k}, a_{k,j}) \leq a_{ij}$ para todo k desde 1 hasta n.

La relación borrosa original se denota R^0.

La relación obtenida a partir de R^0 en la que se han disminuido los primeros m valores de pertenencia o grados de relación se denota R^m.

Se denomina $a_{i,j}{}^m$ la relación entre a_i y a_j por R^m, cuyo grado de relación es por tanto $a_{i,j}{}^m = R^m(a_i, a_j)$.

El algoritmo que se propone en esta unidad obtendrá a partir de R^0 una relación T-transitiva contenida en R^0, así pues, si n es mayor o igual que m entonces $a_{i,j}{}^n \leq a_{i,j}{}^m$. Por tanto $R = R^0 \supseteq R^1 \supseteq ... \supseteq R^m \supseteq ... \supseteq R^n$.

4.3. NUEVO MÉTODO DE T-TRANSITIVIZACIÓN DE RELACIONES BORROSAS.

4.3.1 Introducción al algoritmo.

El algoritmo que se propone consiste en transformar una relación borrosa R^0 en otra relación T-transitiva R_T contenida en R^0 mediante n^2-1 pasos (en cada uno de los cuales disminuye, como mucho, uno de los grados de relación) de forma que $R = R^0 \supseteq R^1 \supseteq \ldots \supseteq R^m \supseteq \ldots \supseteq R^{n^2-1} = R_T$.

La originalidad de este método consiste en que en cada paso se asegura que un elemento $a_{i,j}$ será T-transitivo en la relación del siguiente paso y en todas las relaciones posteriores, incluyendo la relación final T-transitivizada R_T. Es decir, el cada paso m+1 se T-transitiviza un elemento $a_{i,j}^m$ de R^m consiguiendo que $a_{i,j}^r$ sea un elemento T-transitivo de R^r para todo $r \geq m$.

Para poder asegurar que los elementos T-transitivizados sigan siendo elementos T-transitivos de todas las relaciones posteriores, se debe elegir en cada paso el elemento a T-transitivizar de la siguiente manera: Se elige el elemento no T-transitivo de la relación salida del paso anterior que sea el de menor grado de relación entre todos los que todavía no han sido T-transitivizados. Para T-transitivizar dicho elemento $a_{i,j}^m$ de R^m se reducirá el grado de relación de otros elementos no T-transitivizados de R^m, y se logrará que $a_{i,j}^m = a_{i,j}^r$ para todo $r \geq m$, pues al haberse elegido el menor elemento no T-transitivizado, este elemento no será causante de no T-transitividad de otros elementos no T-transitivizados (pues son mayores) por lo que no será recesario reducir su grado de relación en los siguientes pasos.

Utilizando esta técnica el algoritmo termina en a lo sumo n^2-1 pasos (T-transitivizando a lo sumo n^2-1 elements) construyendo una relación T-transitiva.

4.3.2 Descripción del algoritmo.

Las siguientes definiciones de τ y τ^m servirán en el algoritmo para denotar el conjunto de elementos de E×E que ya han sido T-transitivizados en cada paso del algoritmo.

Definición 4.3.1

Sea τ un conjunto de pares (i, j) donde i, j toman valores desde 1 hasta n.

Definición 4.3.2

τ^m es un subconjunto de τ definido inductivamente de la siguiente forma:

1) $\tau^0=\varnothing$

2) $\tau^{m+1} = \tau^m \cup (i, j)$ si $a_{i,j}{}^m$ es el elemento de R^m elegido para ser T-transitivizado durante el paso m+1-ésimo.

Es decir, τ^m es el conjunto de los m pares (i, j) que corresponden a elementos T-transitivizados de R^m y $(\tau^m)'$ es el conjunto de los n^2-m pares (i, j) que corresponden a elementos no T-transitivizados candidatos a serlo en los siguientes pasos.

Definición 4.3.3: Construcción de R^{m+1} a partir de R^m.

Sea $a_{i,j}{}^m$ el elemento de R^m no transitivizado de mínimo valor que ha sido elegido para ser T-transitivizado en el paso m+1 ($a_{i,j}{}^m = \mathrm{Min}\{a_{v,w}{}^m$ tal que $(v, w) \in (\tau^m)'\}$).

Se define $a_{r,s}{}^{m+1}$ como

$$\begin{cases} J^T(a_{s,j}^m, a_{i,j}^m) & \text{si } r = i, T(a_{r,s}^m, a_{s,j}^m) > a_{i,j}^m \text{ y } a_{i,s}^m \leq a_{s,j}^m \\ J^T(a_{i,r}^m, a_{i,j}^m) & \text{si } s = j, T(a_{i,r}^m, a_{r,s}^m) > a_{i,j}^m \text{ y } a_{i,r}^m \geq a_{r,s}^m \\ a_{r,s}^m & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En el caso de que $T(a_{i,k}^m, a_{k,j}^m) > a_{ij}^m$, se elige entre los elementos $a_{i,k}^m$ y $a_{k,j}^m$, para decidir cual de los dos verá reducido su grado en el siguiente paso para que $T(a_{i,k}^{m+1}, a_{k,j}^{m+1}) \leq a_{ij}^{m+1} = a_{ij}^m$.

Un buen criterio para elegir que elemento reducir es reducir el elemento que tenga menor grado, así la diferencia entre R^m y R^{m+1} será menor. Entonces si $a_{i,k}^m \leq a_{k,j}^m$ entonces se define $a_{i,k}^{m+1} = J^T(a_{k,j}^m, a_{ij}^m)$ y si $a_{i,k}^m > a_{k,j}^m$ entonces se define $a_{k,j}^{m+1} = J^T(a_{i,k}^m, a_{ij}^m)$. El grado del resto de elementos se mantiene ($a_{r,s}^{m+1} = a_{r,s}^m$).

4.3.3 El algoritmo es computable

En este apartado se prueba que el algoritmo definido anteriormente en un universo finito de n elementos es computable.

Lema 4.3.1

Si $a_{i,j}^m$ es el m-ésimo elemento a T-transitivizar entonces su valor no cambia en los sucesivos pasos, es decir, $a_{i,j}^m = a_{i,j}^{m+1} = ... = a_{i,j}^{n^2-1}$.

Demostración

El valor del elemento m-ésimo a T-transitivizar $a_{i,j}^m$ no se modifica en los siguientes pasos porque $a_{i,j}^m = \text{Min}\{a_{v,w}^m$ tal que $(v, w) \in (\tau^m)'\}$. $a_{i,j}^m$ nunca provoca que otro elemento no sea T-transitivo, pues su valor es menor que el resto de elementos a T-transitivizar. Así pues, cuando en los siguientes pasos se va a T-transitivizar $a_{r,s}^{m+q}$ se verifica que $T(a_{i,j}^m, x) \leq \text{Min}(a_{i,j}^m, x) \leq a_{i,j}^m \leq$

$a_{r,s}^{m+q}$ para todo $0 \leq q \leq n^2-m-1$, por lo que el valor de $a_{i,j}^{m+q}$ no se reduce en los pasos posteriores y $a_{i,j}^{m} = a_{i,j}^{m+1} = ... = a_{i,j}^{n^2-1}$. ∎

Lema 4.3.2

Si $a_{i,j}^{m}$ es el m-ésimo elemento a T-transitivizar, entonces $a_{i,j}^{m+1}$ es un elemento T-transitivo en R^{m+1}.

Demostración

Por la definición de R^{m+1} se tiene que $a_{r,s}^{m+1} = a_{r,s}^{m}$ excepto para los elementos $a_{i,k}^{m+1}$ o $a_{k,j}^{m+1}$ en el caso de que $T(a_{i,k}^{m}, a_{k,j}^{m}) > a_{ij}^{m}$ para algún k desde 1 hasta n.

En este caso, si $a_{i,k}^{m} \leq a_{k,j}^{m}$ entonces $a_{k,j}^{m+1} = J^T(a_{i,k}^{m}, a_{i,j}^{m})$ y $a_{i,j}^{m+1} = a_{i,j}^{m} = T(a_{i,k}^{m}, J^T(a_{i,k}^{m}, a_{i,j}^{m})) = T(a_{i,k}^{m+1}, a_{k,j}^{m+1})$.

Si $a_{i,k}^{m} > a_{k,j}^{m}$ entonces $a_{i,k}^{m+1} = J^T(a_{k,j}^{m}, a_{i,j}^{m})$ y

$$a_{i,j}^{m+1} = a_{i,j}^{m} = T(J^T(a_{k,j}^{m}, a_{i,j}^{m}), a_{k,j}^{m})) = T(a_{i,k}^{m+1}, a_{k,j}^{m+1}).$$

En ambos casos el elemento $a_{i,j}^{m+1}$ es un elemento T-transitivo de R^{m+1}.

Si $T(a_{i,k}^{m}, a_{k,j}^{m}) \leq a_{ij}^{m}$ para algún k desde 1 hasta n, entonces $a_{i,j}^{m+1} = a_{i,j}^{m} \geq T(a_{i,k}^{m}, a_{k,j}^{m}) = T(a_{i,k}^{m+1}, a_{k,j}^{m+1})$ por lo que $a_{i,j}^{m+1}$ es un elemento T-transitivo de R^{m+1}. ∎

Lema 4.3.3

Si $a_{i,j}^{m}$ es el m-ésimo elemento a T-transitivizar entonces $a_{i,j}^{r}$ es un elemento T-transitivo de R^{r} para todo $r \geq m+1$.

Demostración

Por el lema 4.3.2, $a_{i,j}^{m+1}$ es un elemento T-transitivo de R^{m+1}, por lo que $a_{i,j}^{m+1} \geq T(a_{i,k}^{m+1}, a_{k,j}^{m+1})$ para todo k=1..n.

Se tiene que $a_{r,s}^{m+1} \geq a_{r,s}^{m+1+q}$ para todo $0 \leq q$, $1 \leq r \leq n$, $1 \leq s \leq n$, por lo que

$a_{i,j}^{m+1+q} = a_{i,j}^{m+1} \geq T(a_{i,k}^{m+1}, a_{k,j}^{m+1}) \geq T(a_{i,k}^{m+1+q}, a_{k,j}^{m+1+q})$.

Teorema 4.3.1

La salida R_T es una relación borrosa T-transitiva.

Demostración

$R^T = R^{n^2-1}$ es una relación T-transitiva porque por el lema 4.3.3, sus n^2-1 elementos T-transitivizados (de τ^{n^2-1}) son elementos T-transitivos de R^{n^2-1}. El único elemento no T-transitivizado $a_{f,g}^{n^2-1}$ también es T-transitivo en R^{n^2-1} porque $a_{f,g}^{n^2-1} \geq a_{r,s}^{n^2-1}$ para todo $1 \leq r \leq n$, $1 \leq s \leq n$, así pues $a_{f,g}^{n^2-1} \geq T(a_{f,g}^{n^2-1}, a_{f,g}^{n^2-1}) \geq T(a_{f,k}^{n^2-1}, a_{k,g}^{n^2-1})$ para todo k=1..n. Por lo tanto $R^T = R^{n^2-1}$ es una relación T-transitiva. ∎

4.4 EJEMPLOS

Ejemplo 4.4.1:

Sea E el conjunto $\{a_1, a_2, a_3\}$ y sea R: E×E → [0, 1] la relación borrosa definida por la siguiente matriz:

$$R = R^0 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.9 & 0.2 \\ 0.5 & 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 1 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

donde, por ejemplo, $R(a_1, a_2) = a_{1,2} = 0.9$.

Se muestran los paso del algoritmo propuesto para Min-Transitivizar esta relación.

El elemento que debe ser Min-transitivizado primero es $a_{2,3}{}^0 = 0.1$ porque es el de menor valor. $a_{2,3}{}^0$ no es un elemento Min-Transitivo de R^0 pues $\mathrm{Min}(a_{2,1}{}^0, a_{1,3}{}^0) = \mathrm{Min}(0.5,\ 0.2) \geq 0.1 = a_{2,3}{}^0$. Para Min-transitivizar $a_{2,3}{}^0$ se deben reducir o bien $a_{2,1}{}^0$ o $a_{1,3}{}^0$. En este caso $a_{1,3}{}^0 \leq a_{2,1}{}^0$ por lo que el valor de $a_{1,3}{}^1$ debe ser reducido a $J^{\mathrm{Min}}(a_{2,1}{}^0,\ a_{2,3}{}^0) = a_{2,3}{}^0 = 0.1$, tras lo cual la relación queda de la forma siguiente:

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 1 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

El conjunto de elementos Min-transitivizados es $\tau^1 = \{(2,\ 3)\}$. Ya sabemos que este elemento pertenecerá al conjunto de elementos Min-transitivizados del resto de los pasos, es decir, que $(2,\ 3) \in \tau^{1+q}$ para todo entero $q \geq 0$.

Por el lema 4.3.1, $a_{2,3}{}^{0} = a_{2,3}{}^{1} = a_{2,3}{}^{2} = a_{2,3}{}^{q}$ para todo entero $q \geq 0$. Como $a_{2,3}{}^{0}$ es el elemento de menor valor entonces $\mathrm{Min}(a_{2,3}{}^{q}, x) \leq a_{r,s}{}^{q}$ para cualquier $1 \leq r,s \leq 3$, por lo tanto el valor de $a_{2,3}{}^{q}$ no se modificará durante los siguientes pasos porque nunca será el causante de que otros elementos no sean Min-Transitivos.

Por el lema 4.3.2, $a_{2,3}{}^{1}$ es un elemento Min-transitivo en R^1, y por el lema 4.3.3, $a_{2,3}{}^{1+q}$ es un elemento Min-transitivo en R^{1+q} para todo entero $q \geq 0$.

El segundo paso consiste en Min-transitivizar el siguiente elemento no Min-transitivizado de $(\tau^1)'$ que tenga el menor valor, que en este caso es (1, 3) ya que $a_{1,3}{}^{1}$ es el menor. Sin embargo este elemento ya es Min-transitivo, por lo tanto $R^2=R^1$ y $\tau^2=\{(2, 3), (1, 3)\}$.

En el tercer paso se debe Min-transitivizar el elemento $a_{3,1}{}^{2} = 0.4$. Como $\mathrm{Min}(a_{3,2}{}^{2}, a_{2,1}{}^{2}) = \mathrm{Min}(1, 0.5) \geq 0.5 = a_{3,1}{}^{2}$, entonces el valor de $a_{2,1}{}^{2}$ debe ser reducido de forma que $a_{2,1}{}^{3}$ tome el valor 0.4.

El resto de elementos de R^3 ya son Min-transitivos, por lo que

$$R^3 = R^4 = \dots = R^8 = R_{\mathrm{Min}} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 1 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.4.2

Como R ya es Prod-Transitiva y W-transitiva se tiene que

$$R_{\mathrm{Prod}} = R_{\mathrm{W}} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.9 & 0.2 \\ 0.5 & 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 1 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

4.5 MEDIDA DE T-TRANSITIVIDAD DE RELACIONES BORROSAS.

En este apartado se define la medida de T-transitividad baja y la medida de T-transitividad alta.

Sea T una t-norma triangular. Sea R una relación borrosa y sea R^T su cierre transitivo y R_T la relación obtenida por el algoritmo anterior.

Definición 4.5.1:

Dada una distancia d en [0, 1] y una t-conorma S, se define una **medida de T-transitividad baja** de una relación R como

$$M_{T\text{-}S}{}^{d}\ (\ R\ ) = 1 - S_{(a,\ b)\in E\times E}\{d(R(a,\ b),\ R_T(a,\ b))\}.$$

Definición 4.5.2

Dada una distancia d en [0, 1] y una t-conorma S, se define la **medida de T-transitividad alta** de una relación R como

$$M^{T\text{-}S\text{-}d}\ (\ R\ ) = 1 - S_{(a,\ b)\in E\times E}\{d(R(a,\ b),\ R^T(a,\ b))\},$$

donde R^T es el cierre transitivo de R.

Ejemplo 4.5.1

Sea d la distancia d(x, y) = |x-y|, y sea S la conorma máximo.

Entonces la medida de T-transitividad baja de la relación R de los ejemplos 4.5.1 y 4.4.2 para las t-normas mínimo, producto y *Łukasiewicz* es:

$$M_{Min\text{-}Max}{}^{d}\ (\ R\ ) = 1 - Max_{(a,\ b)\in E\times E}\{d(R(a,\ b),\ R_T(a,\ b))\}$$

$= 1 - 0.1$

$= 0.9.$

$M_{Prod\text{-}Max}{}^{d}(R) = M_{W\text{-}Max}{}^{d}(R) = 1 - 0 = 1.$

Curiosamente estas medidas coinciden con las medidas de T-transitividad altas.

Ejemplo 4.5.2:

Sea d la distancia $d(x, y) = |x-y|$, y sea S la conorma de *Łukasiewicz*.

Entonces la medida de T-transitividad baja de la relación R de los ejemplos 4.5.1 y 4.4.2 para las t-normas mínimo, producto y *Łukasiewicz* es:

$M_{Min\text{-}W}{}^{d}(R) = 1 - W^*_{(a,\, b)\in E\times E}\{d(R(a, b), R_T(a, b))\}$

$= 1 - (0.1 + 0.1)$

$= 0.8.$

$M_{Prod\text{-}W}{}^{d}(R) = M_{W\text{-}W}{}^{d}(R) = 1 - 0 = 1.$

Estas medidas coinciden con las medidas de T-transitividad altas.

Observación

Ni las medidas de T-transitividad bajas ni las medidas de T-transitividad altas son monótonas respecto de la inclusión conjuntista, es decir, no verifican que si dadas dos relaciones borrosas R y R' tal que $R \subset R'$ entonces la $M_{T\text{-}S}{}^{d}(R) \le M_{T\text{-}S}{}^{d}(R')$.

Veamos un ejemplo que prueba que no es monótona respecto de la inclusión conjuntista. Tanto la medida de T-transitividad alta como la medida de transitividad baja de una relación borrosa verifican que si I es la relación borrosa que vale 1 para todo a, b entonces su medida de T-transitividad es 1, y si R es una relación que no sea T-transitiva se tiene que $R \subseteq I$ y sin embargo $M_{T\text{-}S}^{d}$ (R) $\leq M_{T\text{-}S}^{d}$ (I).

Otro ejemplo ilustrativo es: Si R es una relación que no sea T-transitiva entonces su medida de T-transitividad es distinta de uno, y sin embargo

$$M_{T\text{-}S}^{d}\,(R^{T}) = M_{T\text{-}S}^{d}(R_{T}) = 1.$$

siendo $R_T \subseteq R \subseteq R^T$.

Existe una cualidad de las relaciones borrosas de ser más o menos T-transitivas que no está relacionada con la inclusión y que es la que se pretende medir. Se tiene definido un preorden parcial distinto de la inclusión conjuntista, y esta medida es una $\prec$-medida borrosa de las estudiadas por *Trillas y Alsina* [Trillas, 1999], con la propiedad de que en dicho preorden son ínfimos, entre otras relaciones, las relaciones clásicas que no son transitivas, pues en ellas

$$M_{T\text{-}S}^{d}\,(R) = M^{T\text{-}S\text{-}d}(R) = 0$$

y los supremos de dichos preorden parcial son, entre otras relaciones, el $\varnothing$, I, R_T, R^T y todas la relaciones T-transitivas y entonces su medida de T-transitividad alta y baja vale 1.

4.6 PROPIEDADES DEL ALGORITMO

En este apartado se prueban propiedades del algoritmo, como la conservación de la reflexividad, y se buscan contraejemplos para analizar las que no se conservan. Especialmente se prueba que el algoritmo es computable, y se determina la complejidad del algoritmo.

Proposición 4.6.1:

Si $R(a_i, a_i) = \alpha$, entonces $R^m(a_i, a_i) = \alpha$ para todo $m \geq 0$.

Demostración:

El grado de un elemento $a_{i,i}$ solo puede ser reducido si provoca que otro elemento $a_{r,s}$ con i=r o i=s no sea T-transitivo. En este caso

$T(a_{i,i}, a_{i,s}) \leq Min(a_{i,i}, a_{i,s}) \leq a_{i,s}$ y

$T(a_{r,i}\ a_{i,i}) \leq Min(a_{r,i}, a_{i,i}) \leq a_{r,i},$

Por lo tanto los grados de los elementos de la diagonal nunca provocan que otros elementos no sean T-transitivos, por lo que nunca son reducidos.

Corolario 4.6.1

Si R is reflexiva (α-reflexiva) entonces R^T is reflexiva (α-reflexiva), es decir, el algoritmo conserva la propiedad reflexiva (α-reflexiva).

La demostración se deduce de la proposición 4.6.1.

Contraejemplo 4.6.1:

Si $R_1 \subseteq R_2$ no necesariamente $R_1^T \subseteq R_2^T$

Para comprobarlo se ofrece el contraejemplo siguiente.

Sean R_1 y R_2 las relaciones borrosas definidas por las siguientes matrices:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.9 & 1 & 1 \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0.9 & 1 & 1 \end{pmatrix} = R_2.$$

R_1 es Min-transitiva, luego $R_{1Min} = R_1$, y R_{1Min} no está contenida en

$$R_{2Min} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposición 4.6.2:

Si R_1 y R_2 son relaciones borrosas T-transitivas entonces $R_1 \cap_{Min} R_2$ también es una relación borrosa T-transitiva.

Demostración

Si R_1 es una relación borrosa T-transitiva entonces $T(a_{i,k}{}^1, a_{k,j}{}^1) \leq a_{ij}{}^1$.

Si R_2 es una relación borrosa T-transitiva entonces $T(a_{i,k}{}^2, a_{k,j}{}^2) \leq a_{ij}{}^2$.

Como las t-normas son monótonas se tiene que

$T(Min(a_{i,k}{}^1, a_{i,k}{}^2), Min(a_{k,j}{}^1, a_{k,j}{}^2)) \leq T(a_{i,k}{}^1, a_{k,j}{}^1) \leq a_{ij}{}^1$,

$T(Min(a_{i,k}{}^1, a_{i,k}{}^2), Min(a_{k,j}{}^1, a_{k,j}{}^2)) \leq T(a_{i,k}{}^2, a_{k,j}{}^2) \leq a_{ij}{}^2$, y

$T(Min(a_{i,k}{}^1, a_{i,k}{}^2), Min(a_{k,j}{}^1, a_{k,j}{}^2)) \leq Min(a_{i,j}{}^1, a_{i,j}{}^2)$, por lo tanto $R_1 \cap_{Min} R_2$ también es una relación borrosa T-transitiva.

Definición 4.6.1:

Se denota $R_T{}^{Min}$ a la intersección de todas las posibles salidas del algoritmo de T-transitivización.

El algoritmo podría dar diferentes salidas dependiendo del elemento de τ' que se elige para T-transitivizar si hubiese más de un elemento en este conjunto con grado mínimo.

$R_T{}^{Min}$ es la mayor relación que esta contenida en todas las posibles relaciones T-transitivizadas de una relación R.

Corolario 4.6.2:

$R_T^{Min} \subseteq R_{Ti} \subseteq R$ para todo posible relación T-transitivizada R_{Ti} de R.

La demostración es consecuencia de la definición de R_T^{Min} y R_{Ti}

Corolario 4.6.3:

R_T^{Min} es una relación borrosa T-transitiva.

La demostración se deriva de la definición de R_T^{Min} y la proposición 4.6.2.

Contraejemplo 4.6.2:

El algoritmo de T-transitivización de relaciones borrosas no conserva la propiedad de simetría.

Para comprobarlo se ofrece el siguiente contraejemplo.

Sea R la relación borrosa definida por la siguiente matriz:

$$R = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.7 & 0.4 \\ 0.7 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

Una posible relación Min-transitivizade de R podría ser

$$R_{Min} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.7 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.9 \end{pmatrix},$$

que no es simétrica.

Ejemplo 4.6.3:

El siguiente ejemplo muestra que, aunque la relación Min-transitivizada de R no conserva la simetría, sí podría conservar esta propiedad la intersección de todas las posibles relaciones Min-transitivizadas R_T^{Min}.

Sea R la relación borrosa definida por la matriz

$$R = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.7 & 0.4 \\ 0.7 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

Todas las posibles relaciones Min-transitivizadas son:

$$R_{Min1} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.7 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.9 \end{pmatrix},$$

$$R_{Min2} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.7 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.9 \end{pmatrix},$$

$$R_{Min3} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.4 \\ 0.7 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.9 \end{pmatrix},$$

$$R_{Min4} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}$$

y la Min-intersección the todas las relaciones Min-transitivizadas de R es

$$R_{Min}^{Min} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}$$

que también es Min-transitiva, y conserva la propiedad α-reflexividad y la simétrica.

Teorema 4.6.1

Si el conjunto E es finito entonces el algoritmo es computable.

Demostración

Si E es un conjunto finito con n elementos, el algoritmo debe tomar a lo sumo n^2-1 pasos para que los n^2 elementos de la relación salida sean T-transitivos. En cada paso es necesario hacer a lo sumo n-1 operaciones para asegurar que un elemento se hace T-transitivo. Así pues, el algoritmo tiene una complejidad computacional del orden de O(Dim^3 R).

Sin embargo es posible implementar algoritmos más rápidos teniendo en cuenta que los elementos ya T-transitivizados (r, s)$\in \tau^m$ pueden ser omitidos en el resto del algoritmo, pues ya no provocan que otros elementos (f, g) $\in (\tau^m)'$ no sean T-transitivos.

También pueden construirse algoritmos más rápidos utilizando la proposición 4.6.1 para determinar que los elementos de la diagonal nunca van a ser modificados y por lo tanto pueden ser omitidos los cálculos para estos elementos.

4.7 CONCLUSIONES

Se contruye un algoritmo nuevo y original que a partir de una relación borrosa nos da otra relación T-transitiva contenida en la inicial.

Este algoritmo es diferente a otros algoritmos de T-transitivización, pues la salida no es el cierre T-transitivo. Los algoritmos que calculan el cierre transitivo dan la menor relación T-transitiva que contiene a la relación original, mientras que este algoritmo propuesto nos ofrece una relación contenida en la inicial. Como se pueden construir varias posibles soluciones no siempre existe la mayor relación borrosa T-transitiva contenida en la relación inicial. Sin embargo esta relación T-transitiva podría ser mas parecida, según algunas distancias entre relaciones borrosas, a la relación original que el cierre T-transitivo.

El algoritmo estudiado también puede ser utilizado para decidir si una relación dada es T-transitiva.

Se muestra que el algoritmo propuesto conserva la propiedad α-reflexiva, por lo que puede ser útil para construir preórdenes que puedan servir para hacer inferencias borrosas.

Utilizando este algoritmo se pueden definir diferentes medidas de T-transitividad de relaciones borrosas utilizando distintas distancias entre la relación entrada y salida del algoritmo.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y PROBLEMAS ABIERTOS.

En esta memoria de doctorado se estudian se estudian tres tipos muy distintos de medidas que tienen aplicaciones interesantes en el campo de la inteligencia artificial y de los conjuntos borrosos: la medida de μ–T-condicionalidad, la medida de T-especificidad y la medida de T-transitividad.

Esta memoria de doctorado es una reflexión y una aportación a algunas de las medidas que juegan un papel importante en el tratamiento de la información mediante conjuntos borrosos, y muy especialmente en el campo de la inferencia en lógica borrosa.

Se estudian y ofrecen resultados propios sobre dos propiedades de relaciones borrosas que son interesantes cuando la relación es utilizada para realizar inferencias borrosas, introduciendo el concepto de medida de μ-T-incondicionalidad de relaciones borrosas, ofreciendo dos metodologías diferentes para calcularlas y finalmente unificándolas mediante la utilización de una distancia generalizada no conmutativa $1\text{-}J^T$ definida a partir del conocido operador residual J^T. La segunda propiedad deseable para las relaciones borrosas es la T-transitividad. En esta memoria se ofrece un algoritmo nuevo para T-transitivizar relaciones borrosas que ofrece una relación T-transitiva alternativa al conocido cierre T-transitivo y que puede ser utilizada para definir una nueva medida de T-transitividad de relaciones borrosas. La importancia de la propiedad T-transitiva en relaciones borrosas con las que se realizan inferencias es muy conocida y está muy estudiada. El nuevo método conserva algunas propiedades como la reflexividad por lo que puede ser útil, por ejemplo, para obtener un preorden a partir de una relación borrosa reflexiva, y por lo tanto poder obtener consecuencias borrosas según Tarski.

El primer capítulo es una introducción a esta memoria de doctorado, en la que también se exponen los objetivos de la misma.

En el segundo capítulo se trabaja un tipo de medidas monótonas respecto de la inclusión conjuntista que pueden ser utilizadas para dar un grado de μ-T-condicionalidad de relaciones borrosas, es decir, un grado de hasta qué punto se generaliza el *modus ponens* a la hora de hacer inferencia borrosa. Se ofrecen dos originales métodos diferentes para definir dichas medidas y se concluye que si se utiliza la distancia generalizada $1\text{-}J^T$, ambas medidas son iguales para todas las t-normas continuas. Este importante resultado ofrece una metodología sencilla para que en futuros trabajos en los que se realice inferencia borrosa se pueda comprobar rápidamente si efectivamente la relación borrosa es μ-T-condicional o en que grado es μ-T-incondicional, pudiéndose utilizar esta medida como un grado de coherencia a la hora de realizar inferencias con relaciones borrosas.

Se ofrecen ejemplos de medidas de μ-T-incondicionalidad de relaciones borrosas y de operadores utilizando la distancia $1\text{-}J^T$. Se calculan las medidas de μ-T-incondicionalidad de los operadores más utilizados, comprobándose incluso que muchos de los usados con éxito no generalizan el *modus ponens* con la t-norma con la que se realiza la inferencia. En particular muchos operadores μ-W –condicionales no son μ-Min-condicionales, y sin embargo en ocasiones se realizan inferencias con ellos mediante la t-norma mínimo.

Este estudio podría ampliarse analizando las diferencias entre los dos métodos propuestos para definir la μ-T-incondicionalidad en el caso de que la distancia utilizada no sea la distancia generalizada $1\text{-}J^T$.

El tercer capítulo está dividido en tres apartados: $\prec$-medidas borrosa de especificidad bajo universos finitos, $\prec$-medidas borrosa de especificidad bajo universos infinitos, y $\prec$-medidas borrosa de especificidad bajo T-indistinguibilidades.

La importancia de las medidas de especificidad aumenta con el paso del tiempo y son constantes las nuevas aplicaciones que se le encuentran en el mundo del tratamiento de la información y en la lógica borrosa. Es una de las medidas fundamentales para entender procesos de inferencia borrosa, en la que la especificidad, entendida como medida de utilidad de la información, podría ser calculada tanto para los conjuntos borrosos que sirvan de premisas como para los que sean conclusiones. Este trabajo ha aportado una definición que contiene las medidas de especificidad propuestas y utilizadas por otros autores, avanzando en su estudio sobre universos continuos y bajo T-indistinguibilidades.

En la primera parte se esquematizan los trabajos anteriores existentes sobre medidas de especificidad, especialmente los aportados por *R. R. Yager*. Se aporta una nueva definición de $\prec$-medida borrosa de especificidad utilizando dos t-normas, una negación y una t-conorma y se estudia bajo qué condiciones dichas medidas verifican los axiomas de medidas de especificidad de *Yager*. Se muestra como todos los ejemplos que se encuentran en la bibliografía sobre medidas de especificidad son casos particulares de $\prec$-medida borrosa de especificidad. Asimismo se aportan numerosos ejemplos originales y una metodología para crear una gran cantidad de nuevas medidas borrosa de especificidad simplemente variando las t-normas, negaciones o t-conormas.

Se definen y caracterizan las $\prec$-medidas borrosa de especificidad sobre universos continuos a partir de dos t-normas, una negación, una medida y una integral de *Choquet*. Se muestra cómo las medidas de especificidad bajo universos continuos de *Yager* son generalizadas por estas $\prec$-medidas borrosa de especificidad y se ofrecen numerosos ejemplos nuevos. Asimismo se estudian dichos ejemplos cuando las t-normas o las negaciones son modificadas por otras de su misma familia. Por último se ofrecen y analizan ejemplos sobre los mismos conjuntos borrosos utilizando la integral de *Sugeno* en lugar de la integral de *Choquet*.

En la tercera parte del tercer capítulo se trabajan las medidas y $\prec$-medidas borrosas de especificidad cuando la información aumenta mediante una T-indistinguibilidad, problema propuesto por *Yager* que sólo tenía resuelto para similaridades. El trabajo comienza axiomatizando las medidas de especificidad bajo T-indistinguibilidades, explicando cuáles son las motivaciones y el comportamiento que deben tener dichas medidas. Se ofrecen dos enfoques diferentes para calcular dichas medidas: los métodos basados en fórmulas y los basados en algoritmos que calculan clases independientes de inferencia. Se muestra, en ambos casos, que verifican los axiomas de medidas de especificidad bajo T-indistinguibilidades.

El trabajo podría ser continuado estudiando cómo varía la especificidad de conjuntos al realizar inferencias borrosas comparando la especificidad de los conjuntos borrosos que sirvan de premisa con la especificidad de los conjuntos borrosos inferidos. Asimismo el trabajo puede ser utilizado para estudiar una medida de utilidad de los conjuntos borrosos. También queda abierto el campo de definir nuevos métodos de creación de medidas de especificidad bajo T-indistinguibilidades que satisfagan los axiomas propuestos.

Algunas de las medidas que deben tenerse en cuenta para tratar el concepto de información contenida en un conjunto borroso son la entropía o la especificidad de conjuntos borrosos. Otro problema abierto es estudiar y caracterizar con alguna expresión las diversas medidas de entropía que se encuentran en la literatura (ver apéndice 6.7) e intentar generalizar todas ellas de forma análoga al resultado obtenido en el capítulo tercero con las medidas de especificidad, es decir, mediante una expresión general definida con t-normas, t-conormas y negaciones. Asimismo queda abierto el problema de estudiar la relación que puedan tener ambas medidas en el contexto de la inferencia borrosa.

En el cuarto capítulo se ofrece un novedoso método de calcular una $\prec$-medida borrosa de T-transitividad de relaciones borrosas midiendo la diferencia entre una relación borrosa y otra relación obtenida mediante un algoritmo cuya entrada es la relación borrosa y cuya salida es una relación borrosa T-transitiva. Podría utilizarse el conocido cierre T-transitivo, pero este trabajo propone un algoritmo diferente que ofrece una relación T-transitiva contenida en la relación original para cualquier t-norma. Se estudian las propiedades del nuevo algoritmo y se definen la medida de T-transitividad alta y la medida de T-transitividad baja.

Este estudio podría ser continuado mejorando el orden de la complejidad computacional del algoritmo y obteniendo nuevos algoritmos de T-transitivización cuya salida ni contenga ni esté contenida en la relación original, o estudiando, a partir de una distancia entre relaciones borrosas, cual es la relación T-transitiva de distancia mínima a la relación original.

En el apéndice se ha recopilado los conocimientos necesarios para la comprensión de esta memoria y especialmente se ha reflexionado sobre el concepto de medida.

6. APÉNDICES

La lógica clásica, la teoría de conjuntos clásica o la teoría de probabilidad pueden no ser adecuadas para tratar la imprecisión, la incertidumbre, la no especificidad, la vaguedad, la inconsistencia y la complejidad del mundo real. Esto motiva el nacimiento de los conjuntos difusos y las lógicas borrosas y explica su papel en la reestructuración de los fundamentos de las teorías científicas y sus aplicaciones, por lo que se están produciendo grandes avances tanto en áreas teóricas como en gran variedad de aplicaciones.

La teoría de la probabilidad sólo es capaz de representar uno de los tipos de incertidumbre que se basa en la aleatoriedad, no en la imprecisión de la información. *Lotfi A. Zadeh* en 1965 escribe su artículo en el que introduce una teoría sobre unos objetos, los conjuntos difusos, que son conjuntos de frontera no precisa y cuya función de pertenencia indica un grado. En la esfera de los predicados subjetivos, y por tanto imprecisos, la teoría de conjuntos clásica se enfrenta con obstáculos difíciles de superar.

Las lógicas borrosas necesitan generalizar las conectivas entre conjuntos borrosos. Los conectivos lógicos AND, OR y NOT, y las operaciones entre conjuntos intersección, unión y negación se generalizan respectivamente mediante normas triangulares, conormas triangulares y negaciones.

Cuando se pretende utilizar las relaciones borrosas para efectuar inferencias de razonamiento aproximado de la forma

$$\begin{array}{l} \textit{Si } x \textit{ es } P \textit{ entonces } y \textit{ es } Q \\ x \textit{ es } P' \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad y \textit{ es } Q' \end{array}$$

se puede utilizar la regla composicional de inferencia de *Zadeh* y, en el caso de un universo en discurso, se obtendrán consecuencias lógicas en el sentido

Tarski, pero se debe asegurar la propiedad de condicionalidad de la relación borrosa si queremos que se verifique el *Modus Ponens Generalizado* definido por *E. Trillas* [Trillas & Cubillo; 1996].

Parece necesario estudiar las propiedades algebraicas de las relaciones borrosas. Las más utilizadas son la reflexividad, simetría y T-transitividad. Una relación borrosa con estas tres propiedades es una **T-indistinguibilidad**, que generaliza a una relación de equivalencia. Sus aplicaciones son diversas, como la comparación y la clasificación, y es utilizada también en el aprendizaje inductivo automático. Es interesante estudiar las indistinguibilidades como complemento o negación de distancias, aprovechando los conocimientos sobre espacios métricos y espacios métricos generalizados.

Un tipo muy interesante de relaciones borrosas, casi siempre implicaciones lógicas, son los **T-preórdenes**, es decir, las relaciones reflexivas y T-transitivas. Su principal aplicación consiste en que un preorden define un operador de consecuencias en el sentido *Tarski* al aplicar la regla composicional de inferencia de *Zadeh*. Es fundamental el estudio y manejo de las relaciones residuadas de una norma triangular T, que al mismo tiempo son T-preórdenes y una cota superior de las relaciones T-condicionales.

Cuando una relación no cumple alguna propiedad deseable para su buena utilización se puede modificar lo menos posible de forma que verifique la propiedad deseada. Por ejemplo, se puede reflexivizar una relación transitiva para obtener un preorden o simetrizar un preorden para obtener una indistinguibilidad. Aparecen así conceptos nuevos como transitivización o como condicionalización de relaciones borrosas.

En este capítulo "Apéndices" se pretende explicar de forma concisa todos aquellos conocimientos previos necesarios para poder comprender el resto del trabajo.

6.1. TERNAS LÓGICAS

6.1.1 t-normas

Según las aplicaciones se puede definir las operaciones de los conjuntos borrosos utilizando conectivos diferentes al mínimo, máximo y negación. Ya B. *Schweizer* y A. *Sklar* en *"Statistical Metric Spaces"*, en 1960, trabajan las normas triangulares (o t-normas) mediante funciones generadoras, y observando sus propiedades, se comprueba que se pueden utilizar para generalizar la operación de intersección clásica así como las t-conormas para generalizar la unión clásica.

Las t-normas se comportan como conjunciones por lo que son ampliamente utilizadas en lógica borrosa. Las utilizamos por ello en la definición de expresiones de las medidas de especificidad. Además las t-normas pueden ser utilizadas como generadoras de *modus ponens*. Los condicionales residuados asociados con cada una de las t-normas más importantes son bien conocidos. Por esto es preciso resumir en este apéndice sus propiedades más importantes.

Definición 6.1.1:

Una **norma triangular** (o brevemente una t-norma) es una operación binaria asociativa en [0, 1], T: [0, 1]×[0, 1] → [0, 1], que para todo x, y, z de [0, 1] satisface:

T1) $T(x, 1) = x$, (elemento neutro 1)

T2) Si $x \geq x'$, $y \geq y'$ entonces $T(x, y) \geq T(x', y')$ (monotonía)

T3) $T(x, y) = T(y, x)$ (simetría)

T4) $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$ (asociatividad)

lo que significa que es asociativa, conmutativa, no decreciente y con una condición de contorno. Puede visualizarse como una superficie sobre el cuadrado unidad que contiene al segmento (0,1,0) (0,0,0), al segmento (0,0,0) (1,0,0) y al punto (1,1,1). Esta definición puede generalizarse a conjuntos *n*-ários utilizando la propiedad asociativa, y a conjuntos infinitos. Entre las t-normas existe una relación de orden, y una relación de predominancia.

Las t-normas son muy utilizados en lógica borrosa para definir la intersección entre conjuntos borrosos, ya que generaliza la intersección clásica. Como operador lógico, son operadores que satisfacen la tabla lógica del conectivo lógico "y" (AND).

Una t-norma es **arquimediana** si y sólo si es continua y $T(x, x) < x$, para todo $x \in (0,1)$. Las t-normas producto y de *Łukasiewicz* son t-normas arquimedianas; la t-norma mínimo no lo es.

Una t-norma arquimediana es **estricta** si y sólo si es estrictamente creciente en $(0, 1) \times (0, 1)$. La t-norma producto es estricta. La t-norma de *Łukasiewicz* no lo es.

Una t-norma es **positiva** si para $x>0$ e $y>0$ se tiene que $T(x, y)>0$. La t-norma mínimo y la t-norma producto son positivas. La t-norma de *Łukasiewicz* no lo es.

Se pueden definir las t-normas axiomáticamente o mediante funciones generadoras [*B. Schweizer* y *A. Sklar*. *Probabilistic Metric Space*. 1983].

En 1826, *N. H. Abel* encontró con técnicas diferenciales la representación de funciones asociativas regulares como funciones $F(x, y)$ que son generadas por otra función f de la forma $F(x, y) = f^{-1}(f(x) + f(y))$,

B. Schweizer y *A. Sklar* definen las normas triangulares arquimedianas como generadas por funciones f: $[0, 1] \to [0, \infty]$, decrecientes, continuas, y con $f(1)=0$ de la forma

$$\mathbf{T}(x, y) = f^{[-1]}(f(x) + f(y)), \text{ donde } f^{[-1]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(0) < x \\ f^{-1}(x) & \text{si } 0 \leq x \leq f(0) \end{cases}.$$

Por ejemplo, $f(x) = -log(x)$ genera la t-norma producto, y $f(x) = 1-x$ genera la t-norma de *Łukasiewicz*. A la función f se le denomina **generador aditivo** de la t-norma T. Una norma triangular arquimediana es estricta si y sólo si la función que la genera verifica que $f(0) = \infty$, como por ejemplo, la t-norma producto, y en ese caso $f^{(-1)}$ es la función inversa de f. Para t-normas arquimedianas no estrictas existe un único generador aditivo tal que $f(0) = 1$ que se denomina generador aditivo normalizado. Existe un teorema de representación debido a *Aczél-Ling*.

Muchos trabajos han tratado y tratan sobre el estudio de las t-normas buscando funciones generadoras o analizando sus propiedades.

6.1.1.1 Familias de t-normas

Si f: [0, 1] $\rightarrow$ [0, ∞] es una función decreciente continua, y con $f(1)=0$ entonces $\varphi o f$, definido por $f o \varphi(x) = f(\varphi(x))$, también lo es. Sea T una t-norma generada por una función f, entonces se llamará $\mathbf{T}_\varphi$ a la t-norma generada por $f o \varphi$, es decir, a la t-norma transformada de T por una función φ. La familia de t-normas de una norma triangular T, denotada $\mathfrak{I}(\mathbf{T})$, es el conjunto de t-normas transformadas de T por cualquier función φ: [0, 1] $\rightarrow$ [0, 1] estrictamente creciente, continua en [0, 1] y tal que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$.

Veamos a modo de ejemplo una pequeña contribución a las familias de t-normas:

Proposición

Sea φ una función definida de [0, 1] en [0, 1] estrictamente creciente, continua en [0, 1] y tal que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$. Sea T una norma triangular generada por f, entonces T_φ se puede definir de la forma

$$T_\varphi(x, y) = \varphi^{-1}(T(\varphi(x), \varphi(y)))$$

Demostración

T_φ es la t-norma generada por $f \mathrm{o} \varphi$, luego

$$\begin{aligned} T_\varphi(x, y) &= [f \mathrm{o} \varphi]^{[-1]} (f \mathrm{o} \varphi(x) + f \mathrm{o} \varphi(y)) = \varphi^{[-1]} \mathrm{o} f^{[-1]} (f \mathrm{o} \varphi(x) + f \mathrm{o} \varphi(y)) \\ &= \varphi^{[-1]}(f^{[-1]}(f(\varphi(x)) + f(\varphi(y)))) = \varphi^{-1}(f^{[-1]}(f(\varphi(x)) + f(\varphi(y)))) \\ &= \varphi^{-1}(T(\varphi(x), \varphi(y))) \end{aligned}$$

Por tanto si φ es una función estrictamente creciente y continua en [0, 1] tal que $\varphi(0)=0$ y $\varphi(1)=1$ entonces podemos definir la t-norma:

$$T_\varphi(x,y) = \varphi^{-1}(T(\varphi(x), \varphi(y)))$$

y se dice que es de la familia de T.

La mayor t-norma es el mínimo: *Mín,* que es continua pero no es arquimediana, y es la única t-norma de su familia. Otras muy utilizadas son las de la familia del producto $\Im(Prod)$ que son t-normas continuas, arquimedianas y estrictamente positivas, y las t-normas de la familia de *Łukasiewicz* $\Im(W)$ que son t-normas continuas y arquimedianas aunque no son estrictas y tampoco son positivas. Verifican que $\mathrm{Min}(x, y) \geq \mathrm{Prod}(x, y) \geq W(x, y)$.

6.1.1.2 Suma ordinal

Definición 6.1.2:

Una t-norma T es una **suma ordinal** si existe un conjunto finito o infinito numerable de t-normas arquimedianas $\{T_i: i \in J\}$ y un conjunto de intervalos disjuntos $\{(a_i, b_i): i \in J\}$ de [0, 1] tal que

$$T(x, y) = \begin{cases} a_i + (b_i - a_i) T_i\left(\frac{x-a_i}{b_i-a_i}, \frac{y-a_i}{b_i-a_i}\right) & \text{si } (x,y) \in [a_i, b_i]^2 \\ \mathrm{Min}(x,y) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Con esta definición puede probarse que las t-normas sumas ordinales son continuas, aunque no son arquimedianas por estar definidas en algunos intervalos por el mínimo, y tampoco son idempotentes, por estar definidas en otros intervalos por t-normas arquimedianas.

Las únicas t-normas continuas son, bien la t-norma mínimo, bien de la familia de la t-norma del producto, bien de la familia de la t-norma de *Łukasiewicz* o bien una suma ordinal.

6.1.2 t-conormas

Las t-conormas, o conormas triangulares, son operadores S: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ muy utilizados en lógica borrosa para definir las uniones entre conjuntos borrosos pues generalizan la unión clásica. Como operador lógico, son operadores que satisfacen la tabla lógica del conectivo "o", (OR).

Se pueden definir las t-conormas a partir de las t-normas, axiomáticamente o mediante funciones generadoras [*B. Schweizer* y *A. Sklar. Probabilistic Metric Space.* 1983].

Una operación S: $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ en una t-conorma si $T(x, y) = 1-S(1-x,1-y)$ es una t-norma.

Definición 6.1.3:

Dada una t-norma T, se define la **conorma dual** de T como

$$T^*(x, y) = 1 - T(1-x, 1-y).$$

La t-conorma dual del Mínimo es el Máximo, la dual del producto es la suma probabilística: $\mathrm{Prod}^*(x, y) = x + y - xy$. La t-conorma dual de *Łukasiewicz* es $W^*(x, y) = \mathrm{Mín}\{1, x+y\}$.

Definición 6.1.4:

Axiomáticamente se define una conorma triangular S: $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0,1]$, como un operador que satisface los cuatro axiomas siguientes.

S1) $S(x, 0) = S(0, x) = x$, para todo $x \in [0,1]$

S2) Si $x \geq x'$, $y \geq y'$ entonces $S(x, y) \geq S(x', y')$ (monotonía)

S3) $S(x, y) = S(y, x)$ para todo $x, y \in [0,1]$ (simetría)

S4) $S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$ para todo $x, y, z \in [0,1]$ (asociatividad)

Una t-conorma es **arquimediana** si y sólo si es continua y $S(x, x) > x$, para todo $x \in (0, 1)$. Una t-conorma arquimediana es **estricta** si y sólo si es estrictamente creciente en $(0, 1) \times (0, 1)$. El máximo no es arquimediana, Prod* y W* si lo son. Prod* es una t-conorma arquimediana y estricta, y W* no es estricta.

B. Schweizer y *A. Sklar* definen las conormas triangulares arquimedianas como las generadas por funciones g: $[0, 1] \rightarrow [0, \infty]$, crecientes, continuas, y con $g(0) = 0$ de la forma

$$\mathbf{S}(x, y) = g^{[-1]}(g(x) + g(y)), \text{ donde } g^{[-1]}(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) & \text{si } x < g(1) \\ 1 & \text{en el resto} \end{cases}.$$

Por ejemplo, $g(x) = -log(1-x)$ genera la t-conorma dual del producto, y $g(x)=x$ genera la t-conorma dual de *Łukasiewicz*. A la función g se le denomina **generador aditivo** de la conorma triangular S. Una conorma triangular arquimediana es estricta si y sólo si su generador aditivo verifica que $g(1) = \infty$.

Veamos una pequeña contribución propia a las familias de t-conormas:

Proposición 6.1.2:

Sea φ una función definida de [0, 1] en [0, 1] estrictamente creciente, continua en [0, 1] y tal que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$. Sea T una t-norma continua y sea T* su t-conorma dual. Si $\varphi(1-x) = 1-\varphi(x)$ entonces $(T_\varphi)^* = (T^*)_\varphi$.

Demostración

Por ser $\varphi(1-x) = 1-\varphi(x)$ entonces $1-x = 1-\varphi(\varphi^{-1}(x) = \varphi(1-\varphi^{-1}(x))$ luego $\varphi^{-1}(1-x) = 1-\varphi^{-1}(x)$. Por tanto:

$$
\begin{aligned}
(T_\varphi)^*(x, y) &= 1-T_\varphi(1-x,1-y) = \varphi^{-1}(\varphi(1-T_\varphi(1-x,1-y))) \\
&= \varphi^{-1}(\varphi(1-\varphi^{-1}(T(\varphi(1-x), \varphi(1-y))))) \\
&= \varphi^{-1}(1-\varphi(\varphi^{-1}(T(\varphi(1-x), \varphi(1-y))))) \\
&= \varphi^{-1}(1-T(1-\varphi(x),1-\varphi(y))) = (T^*)_\varphi (x, y)
\end{aligned}
$$

6.1.3 Negaciones

Las **negaciones** son operadores N: [0, 1] $\rightarrow$ [0, 1] muy utilizados en lógica borrosa para definir tipos de complementos entre conjuntos borrosos que generalizan la negación clásica. Como operador lógico, son operadores que satisfacen la tabla lógica del "No", (NOT).

Definición 6.1.5:

Una función N: [0, 1] → [0, 1] se define axiomáticamente como una negación si verifica los tres axiomas siguientes:

N1) N(0)=1

N2) N(1)=0

N3) N es no creciente.

Una negación es **estricta** si y sólo si es continua y estrictamente decreciente. Una negación es **involutiva** si y sólo si $N(N(x)) = x$ para todo $x \in [0,1]$, es decir, si $N=N^{-1}$. Se dice que una negación es una **negación fuerte** si es continua, estrictamente decreciente e involutiva.

Sea φ: [0, 1] → [0, 1] una función estrictamente creciente, continua en [0, 1], y tal que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$. Se denomina negación generada por φ a $N(x) = \varphi^{-1}(1-\varphi(x))$.

S. Weber demuestra el siguiente resultado: Sea T una t-norma (continua) y sea N una negación, entonces $S(x, y) = N^{-1}(T(N(x), N(y))$ es una t-conorma (continua).

Sea T una t-norma arquimediana (estricta) generada por f, entonces $g = f \circ N$ genera una t-conorma arquimediana (estricta). Además $f(0) = g(1)$.

Definición 6.1.6: Conorma dual de T respecto de la negación N

Se define T* como la t-conorma dual de T respecto de la negación N si:

$T^*(x, y) = N(T(N(x), N(y)))$.

Las familias de conectivos lógicos más utilizadas son:

	T(*x*, *y*)	**Generador aditivo**	**S(*x*, *y*)**	**Generador aditivo**	**N(*x*)**
Zadeh	$Min(x,y)$		$Max(x,y)$		$1-x$
	$x.y$	$-log(x)$	$x+y-xy$	$-log(1-x)$	
$Yager_p$	$1\text{-Min}(((1-x)^p+(1-y)^p)^{1/p},1)$	$(1-x)^p$	$Min((x^p+y^p)^{1/p},1)$	x^p	$(1-x^p)^{1/p}$
$Dombi_\lambda$ $\lambda>0$	$\frac{1}{1+\left[(\frac{1}{x}-1)^{-\lambda}+(\frac{1}{y}-1)^{-\lambda}\right]^{-1/\lambda}}$	$\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda}$	$\frac{1}{1+\left[(\frac{1}{x}-1)^{\lambda}+(\frac{1}{y}-1)^{\lambda}\right]^{1/\lambda}}$	$\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda}$	$1-x$
$Weber_\lambda$ $\lambda>-1$	$\text{Max}(\frac{x+y-1+\lambda xy}{1+\lambda},0)$	$1-\frac{\ln(1+\lambda x)}{\ln(1+\lambda)}$	$Min\ (x+y+\lambda xy,1)$	$\frac{\ln(1+\lambda x)}{\ln(1+\lambda)}$	$\frac{1-x}{1+\lambda x}$
W *Łukasiewicz:* $Weber_\lambda$ con $\lambda=0$	Max(x+y-1,0)		Mín{1, x+y}		1-x
$Hamacher_\gamma$ $\gamma>0$	$\frac{xy}{\gamma+(1-\gamma)(x+y-xy)}$	$\frac{1}{\gamma}ln\frac{\gamma+(1-\gamma)x}{x}$	$\frac{x+y-xy-(1-\gamma)xy}{1-(1-)xy}$	$\frac{1}{\gamma}ln\frac{\gamma+(1-\gamma)(1-x)}{1-x}$	$1-x$

6.1.4 Familias de conectivos lógicos borrosos.

Una **familia de conectivos lógicos borrosos** (T, S, N) está formada por una norma triangular T, una conorma triangular S y una negación N, y se denomina una **terna de *De Morgan*** o **terna de *Morgan*** cuando S es la t-conorma dual de T respecto a la negación N. Se utilizan para generalizar las operaciones de intersección, unión y complementario. En el caso clásico los conectivos lógicos dotan al conjunto de partes de un conjunto de una estructura de álgebra de *Boole*, pero esta estructura no se consigue en el caso borroso.

Hemos visto que la familia $\{Mín, Máx, 1-x\}$ propuesta por *Zadeh* no verifica el *tercio excluso* y la no contradicción ($Mín\{x, \mathrm{N}(x)\} \neq 0$; $Máx\{x, \mathrm{N}(x)\} \neq 1$), aunque verifica el resto de propiedades de un álgebra de *Boole* (como las leyes de *Morgan*).

Es sencillo comprobar que la distributividad implica la ley de absorción, que a su vez implica la idempotencia. Las normas y conormas arquimedianas no son idempotentes, y las sumas ordinales tampoco, por lo que $\{Mín, Máx, 1-x\}$ es la única familia continua que satisface la propiedad distributiva o modular. Por tanto la familia de *Łukasiewicz* con $\mathrm{N}(x) = 1 - x$ no es distributiva aunque sí satisface la ley de no contradicción y el *tercio excluso*. Según las propiedades que interese que se verifiquen en las aplicaciones se elige una terna u otra.

6.2. RELACIONES BORROSAS

6.2.1 Estructura relacional borrosa

Entre los predicados graduados pertenecientes a una misma variable lingüística usualmente existe una relación de antonimia. De hecho los valores lingüísticos de muchas variables pueden generarse a partir de un par de predicados antónimos y una serie de modificadores. Por ejemplo, para la variable lingüística *temperatura*, los predicados *frío* y *caliente* pueden generar los valores *helado*, *bastante frío*, *frío*, *bastante caliente*, *caliente*, *muy caliente* generados mediante los modificadores *muy* y *bastante*. El uso de conectivos lógicos de conjunción, disyunción y negación permiten combinar estas etiquetas para obtener otras como *templado = ni caliente ni frío*. La importancia de las relaciones de antonimia entre predicados se manifiesta en la cantidad de conocimiento que se adquiere gracias a la existencia de predicados antónimos. Cuando se transmite información mediante alguno de estos conceptos se supone de forma implícita la existencia del contrario y de una posición intermedia. *Zadeh* al definir variable lingüística utilizó gramáticas generativas de tal forma que, a partir de ciertos operadores, todos los términos lingüísticos de la variable están dados. De la misma forma si se tiene una semántica asociada a los términos lingüísticos básicos mediante conjunto borrosos se tiene una semántica asociada a todos los términos lingüísticos válidos, sin más que asociar a dichos operadores operaciones adecuadas entre conjuntos borrosos. Sin embargo consideramos que la asignación de un significado a esos términos mediante conjuntos borrosos se realiza de otra forma, con base en los términos implícitos existentes cuando se realiza una predicación, constituyendo una jerarquía de varios niveles, cada uno de ellos presentando diferente granularidad. La clase de conjuntos borrosos de cada nivel se obtendrá como una partición borrosa del universo compatible con una indistinguibilidad. Veamos como se definen estos conceptos.

Sea X un conjunto clásico. Una relación borrosa (o difusa) es una aplicación R: X×X → [0, 1], es decir, una relación borrosa sobre X es un conjunto borroso sobre X×X. Al conjunto (X, R) formado por un conjunto borroso X y una relación borrosa R se le llama **estructura relacional borrosa**. Entre las relaciones más destacadas en la teoría de conjuntos clásica tenemos las relaciones de orden y las de equivalencia, luego las propiedades que nos interesará definir ahora son la reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva. Como con las operaciones entre conjuntos tenemos también muchas posibilidades y formas diferentes de definirlas.

Se dice que una relación borrosa es **reflexiva** si R(a, a) = 1 para todo $a \in$X. Se dice que es **simétrica** si R(a, b) = R(b, a) para todo a, $b \in$X. Es sencillo probar que una relación borrosa es reflexiva si y sólo si las relaciones clásicas definidas por los subconjuntos de nivel de R son relaciones reflexivas. Lo mismo ocurre con la propiedad simétrica.

Una relación borrosa que es reflexiva y simétrica se denomina **relación de semejanza**. Un ejemplo de una relación de semejanza puede ser la representada por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.7 \\ 0.3 & 1 & 0.4 \\ 0.7 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

Se dice que una relación borrosa es **α-reflexiva** (reflexiva al menos en un cierto grado), si R(a, a) es siempre mayor o igual a un cierto valor α.

Debemos ser más cautelosos en el momento de definir la transitividad pues si a está cerca de b, y b está cerca de c, ¿podemos siempre asegurar que a está cerca de c? Es de sobra conocido el comportamiento de los sinónimos respecto a la transitividad.

R transitiva $\equiv$ Si R(a, b) y R(b, c) entonces R(a, c)

$$\equiv R(a, b) \wedge R(b, c) \leq R(a, c)$$

$$\equiv R(a, c) \geq \textit{máx}\{\textit{min}\{R(a, x), R(x, c)\}\}$$

Y generalizando se dice que una relación borrosa es **T-transitiva** (T es una t-norma) si: T(R(a, b), R(b, c)) $\leq$ R(a, c) para todo a, b, $c \in$ X. Una de nuestras aportaciones ha sido trabajar en la búsqueda de algoritmos que hagan T-transitiva una relación.

6.2.2 Cierre T-transitivo

Es muy conocido el cierre T-transitivo R^T de una relación R, definido como la menor relación que contiene a R y que es T-transitiva. Se puede trabajar en la construcción de relaciones que consigan la T-transitividad de una relación dada R y estén contenidas en dicha relación. Un algoritmo es el siguiente:

1) $R' = R \cup_{Max} (R \circ_{Sup\text{-}T} R)$
2) Si R' $\neq$ R entonces R := R' y volver a 1), y en otro caso terminar, y R^T := R'.

6.2.3 Preórdenes e indistinguibilidades

Una relación borrosa que sea reflexiva y T-transitiva se denomina un **T-preorden**. Una relación borrosa que sea reflexiva, simétrica y T-transitiva se dice que es una **T-similaridad** o una **T-indistinguibilidad**.

Los preórdenes, entre los que se encuentran las relaciones de implicación, son muy utilizados para realizar inferencias borrosas. La relación borrosa $J_A{}^T$: X $\times$ X $\rightarrow$ [0, 1] definida por:

$$J_A^T(a, b) = Sup\{z: T(A(a), z) \leq A(b)\},$$

es un T-preorden.

Las indistinguibilidades generalizan a las relaciones de equivalencia clásicas y se utilizan para definir valores de "similitud" o distancias generalizadas. Se puede definir partición borrosa y considerar la noción de compatibilidad de una partición respecto una T-indistinguibilidad.

6.3. LÓGICAS BORROSAS

La utilización usual del término "lógica borrosa" está ligado a una semántica de muy amplio espectro que es entendida básicamente como sinónimo de todo aquello que arranca del trabajo de *Zadeh* sobre conjuntos borrosos.

La lógica se ocupa de hacer inferencias verdaderas a partir de otras verdades. Como ciencia que estudia el razonamiento aproximado la lógica borrosa ha proporcionado un cálculo para las consecuencias imprecisas, resultado de gestionar convenientemente la vaguedad de las premisas y, en ocasiones, la fuerza de la implicación. Tanto la vaguedad de las premisas como la credibilidad de la conclusión se representan frecuentemente en términos de grados de verdad. La noción de grado de verdad puede interpretarse como una verdad parcial o como utilidad, esto es, una creencia subjetiva que tiene el agente en la verdad de esa proposición. Pero ahora nuestro grado de verdad no es sólo falso (0) o cierto (1) sino que puede haber grados. Se tiene por tanto que definir que se entiende por "premisa", "consecuencia" y "conjetura".

Uno de los problemas de la lógica borrosa es el tratamiento de la inferencia con información imprecisa y, en particular, el de la obtención de modelos para los enunciados condicionales, es decir, los del tipo: *"Si x es A entonces y es B"*, donde *x* e *y* son elementos del universo y *A* y *B* son predicados vagos sobre el mismo. Con este fin se han definido operadores a partir de conceptos análogos de las lógicas bivaluada y multivaluada.

Un método de razonamiento borroso es un procedimiento de inferencia que deriva conclusiones entre un conjunto de reglas borrosas y un ejemplo. Para ello se tiene en cuenta el grado de compatibilidad, el grado de asociación, la función de ponderación, el grado de clasificación del ejemplo en cada una de las clases y la clasificación.

Es pues muy necesario proveer de teorías sobre las formas adecuadas de realizar estas inferencias, y de obtener consecuencias desde un conjunto de reglas dado.

6.3.1 Operador de consecuencias

Sea E un conjunto cuyos elementos representan objetos lógicos, o proposiciones, y se parte de un conjunto de premisas V que será un subconjunto de E distinto del vacío. En este sentido *Alfred Tarski* axiomatizó la idea de "consecuencia" lógica a través de lo que se denomina **un operador de consecuencias** C, que es una aplicación de $\Phi(E)$ en $\Phi(E)$ que verifica:

1) $V \subset C(V)$ para todo $V \in \Phi(E)$ (las mismas premisas son consecuencias)
2) Si $V_1 \subset V_2$ entonces $C(V_1) \subset C(V_2)$ (a más premisas no menos consecuencias)
3) $C(V)= C(C(V))$ (se deducen todas las consecuencias posibles)

Luego, partiendo de un conjunto de premisas, mediante los operadores de consecuencias se obtiene el conjunto de consecuencias que puede deducirse por algún método adecuado. La primera propiedad nos dice que cada premisa puede considerarse una consecuencia, la segunda asegura la monotonía en el sentido de que al aumentar el número de premisas se aumenta el número de consecuencias, y la tercera dice que una vez halladas "todas" las consecuencias, ya no hay más consecuencias, pues C^2=C. Una **lógica,** según la idea tarskiana, no es otra cosa que un conjunto de proposiciones provisto de un operador de consecuencias.

6.3.2 *Condicional lógico*

Se define un **condicional lógico** respecto de V como una relación borrosa R que satisfaga la regla del *modus ponens*: si $a \in V$ y si $R(a, b)$, entonces $b \in V$, es decir la relación transmite el carácter de "verdad". Sea V una premisa o subconjunto borroso de E, y sea R una relación borrosa sobre E, se define $C_R(V)$ al conjunto de elementos de E tal que existe un $a \in V$ y $R(a,x)$ que verifique los axiomas de operador de consecuencias.

Una relación de preorden clásica genera un operador de consecuencias, y si C es un operador de consecuencias sobre E, la relación R definida sobre E por $aRb \Leftrightarrow b \in C(a)$ es un preorden. ¿Qué ocurre si se utilizan preórdenes borrosos? Pues si R es un T-preorden, con T una t-norma positiva, (es decir, $x>0$, $y>0 \Rightarrow T(x, y) > 0$) el operador definido por $C_R(V)=\{b \in E;\ R(a, b) > 0$, para algún $a \in V\}$ es un operador de consecuencias en E. Se observa que el *Mín* y las t-normas de la familia del *Prod* son t-normas positivas y sin embargo la familia de las t-normas de *Łukasiewicz* no lo son.

6.3.3 *T-estados lógicos*

Dado una estructura relacional borrosa (E, R) y una t-norma T sea $T(E,R)=\{\mu \in [0,1]^E: T(\mu(a), R(a, b)) \leq \mu(b), \forall a, b \in E\}$ el conjunto de **T-estados lógicos** de (E, R), es decir, los conjuntos borrosos sobre E que verifican el *modus ponens*.

6.4. PROPIEDAD DE μ-T-CONDICIONALIDAD

Se pretende generalizar el condicional clásico, cuando éste utiliza la *regla del modus ponens*. Para ello se observa cómo se comporta el condicional clásico. Se parte de dos conjuntos E_1, E_2 y se denomina E al conjunto $E_1 \cup E_2$. Se considera un subconjunto V de E (elementos verdaderos).

Definición 6.4.1:

La relación $R \subseteq E_1 \times E_2$ es un V-condicional clásico si para todo a de E_1 y b de E_2 se verifica que si $a \in V$, y $(a, b) \in R$, entonces $b \in V$. Si se hace uso de las funciones características, se expresa: Si $\varphi_V(a)=1$ y $\varphi_R(a, b)=1$ entonces $\varphi_V(b)=1$, que dicho de otra forma:

$$\min\{\varphi_V(a), \varphi_R(a, b)\} \leq \varphi_V(b)$$

Por tanto, al intentar generalizar el concepto de condicional clásico (con la *regla del modus ponens*) se debe disponer de:

1) Unas proposiciones borrosas "a es P", "b es Q" que se describen mediante los subconjuntos borrosos $\mu_P: E_1 \rightarrow [0, 1]$ y $\mu_Q: E_2 \rightarrow [0, 1]$

2) Una relación condicional borrosa R que represente a "Si a es P entonces b es Q", Luego R: $E_1 \times E_2 \rightarrow [0, 1]$, que habitualmente se define como $R(a, b) = R\mu(\mu_P(a), \mu_Q(b))$ siendo $R\mu$ una relación numérica de $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Son las relaciones usualmente denominadas de implicación (Klir & Yuan; 1995), (Trillas y otros; 1995).

3) Es preciso disponer también de una regla de inferencia, esto es de un procedimiento que permita obtener "verdades" de otras "verdades". La regla de inferencia que generaliza el *Modus Ponens* (Trillas &

Valverde; 1985; 1985 b) es una función de T de [0, 1] $\times$ [0, 1] en [0, 1] que debe cumplir las siguientes propiedades:

(a) $T(x, x \rightarrow y) \leq y$, donde $\rightarrow$ es un condicional. O utilizando las cotas inferiores: $\mathrm{Sup}\{z: T(x, z) \leq y\}$.

(b) $T(1, 1) = 1$. En la práctica los operadores T se representan mediante una norma triangular.

(c) O se sugieren otras posibles propiedades, como la monotonía respecto de la primera variable.

Los condicionales borrosos son por tanto relaciones borrosas que verifican una determinadas reglas, con las que generalizan al condicional clásico.

Definición 6.4.2:

La definición de *Enric Trillas* de la propiedad de μ-T-condicionalidad [Trillas; 1993] es la siguiente:

Sean E_1, E_2 dos conjuntos y se denomina E al conjunto $E_1 \cup E_2$. Sea T una t-norma continua y sea μ: E $\rightarrow$ [0, 1] un conjunto borroso. Se dice que una relación borrosa R: $E_1 \times E_2 \rightarrow [0, 1]$ es **(μ_P, μ_Q)-T-condicional** si y sólo si

$$T(\mu_P(a), R(a, b)) \leq \mu_Q(b) \text{ para todo } (a, b) \text{ en } E_1 \times E_2.$$

También se dice que **(μ_P, μ_Q) es un T-estado lógico** para la estructura relacional ($E_1 \times E_2$, R), o que (μ_P, μ_Q) verifica el *modus ponens* respecto de T en ($E_1 \times E_2$, R).

Definición 6.4.3: T_R^{μ}

Sea T una t-norma continua, R una relación borrosa y μ un subconjunto borroso de $E_1 \times E_2$. Se denomina T_R^{μ} a la relación borrosa sobre $E_1 \times E_2 \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$\mathbf{T_R^{\mu} (a, b) = T(\mu(a), R(a, b)).}$$

Definición 6.4.4: J_{μ}^{T}

Sea T una t-norma continua y μ un subconjunto borroso de $E_1 \times E_2$. Se denomina la relación borrosa $J_{\mu}^{T}(a, b)$ en cada punto de $E_1 \times E_2$ definida como $J^T(\mu(a), \mu(b))$, donde J^T es la operación residuada de la t-norma T, definida por $J^T(x, y) = \text{Sup } \{z: T(x, z) \leq y\}$.

6.5. OPERADORES DE IMPLICACIÓN

A la hora de buscar generalizaciones las posibilidades son múltiples, pero debe mantenerse siempre que, al aplicar el nuevo concepto al caso límite de valores de pertenencia 0 o 1 el resultado coincida con el dado por el concepto original. Para representar enunciados condicionales los operadores de implicación deben buscarse entre aquellos que verifiquen los de la implicación lógica clásica. Por tanto los operadores de implicación generalizan la implicación lógica clásica, cuya tabla de verdad es

a	b	$a \Rightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

y una vez añadidas unas condiciones de monotonía propias del cálculo proposicional clásico. Puede definirse como:

$$a \Rightarrow b \equiv a' + b \equiv b + (a'.b') \equiv a' + a.b.$$

Siguiendo esta idea se puede definir la implicación borrosa como:

a	b	$a'+b$	$a \cdot b$	b	$a \cdot b + a' \cdot b'$	$a' \cdot b$	$a' \cdot b'$	a'
0	0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0

sin más que imponer que si la primera proposición es cierta y la segunda falsa entonces la implicación debe ser falsa. Pero también es interesante imponer que si ambas proposiciones son ciertas, la implicación debe ser cierta, con lo que nos quedamos únicamente con cuatro posibilidades: $a'+b$, $a \cdot b$, b, $a \cdot b + a' \cdot b'$. La primera posibilidad, a la que se llama **implicación material**, es la misma que se deduce de la tabla de la implicación lógica clásica. Recordemos que · puede ser cualquier t-norma, + cualquier t-conorma y ' cualquier negación, según la terna de *Morgan* elegida. Cuando · es el mínimo la implicación se denomina de *Mamdani* y es la más utilizada en control. También se usa mucho en control con buenos resultados la segunda: a·b, sustituyendo · además de por el mínimo, por otras t-normas. La tercera indica que al menos la implicación tenga el mismo valor de verdad que la segunda proposición. La cuarta es la equivalencia lógica, o doble implicación. Cada una de estas cuatro posibles implicaciones lógicas tienen propiedades diferentes y puede ser interesantes unas u otras según las aplicaciones.

En un Álgebra de *Boole* (B, +, ·, ') se dice que una operación →: B×B→B es una implicación si, para todo x, y en B es $x\cdot(x\to y)\leq y$, desigualdad que es equivalente a $x \to y \leq x'+y$. Por tanto, la implicación material no es la única implicación, pero sí la mayor de todas. En la tabla anterior hemos visto que podemos tener seis funciones booleanas que cumplen dicha condición.

Los principales operadores de implicación son:

6.5.1 Implicación residuada

Definición 6.5.1:

Se define la **implicación residuada** de una t-norma continua T, y se denota J^T, a la aplicación: J^T: [0, 1] × [0, 1] → [0, 1] tal que:

$$\mathbf{J^T(x, y) = \mathit{Sup}\ \{z: T(x, z) \leq y\}.}$$

Dado un conjunto borroso sobre un universo entonces:

$J^{min}(x, y)=\begin{cases} 1 & si\ x \leq y \\ y & si\ x > y \end{cases}$ es un *Min*-preorden borroso

$J^{prod}(x, y)=Min(1, y/x)$ es un *Prod*-preorden borroso

$J^W(x, y)=Min(1, 1-x+y)$ es un W-preorden borroso

Se tienen pues tres familias de implicaciones lógicas borrosas que se deben estudiar. Cada una de ellas tiene sus ventajas e inconvenientes, por lo que en los sistemas expertos se utilizan una u otra según la conveniencia. Por ejemplo en un álgebra de *Boole* de probabilidades funciona bien la t-norma de *Łukasiewicz*.

6.5.2 S-Implicación

Dada una t-conorma S y una negación N, se define una operación de S-implicación como $I(x, y) = S(N(x), y)$. Observamos que es una generalización de la implicación definida por $x'+y$.

Observamos que el concepto de implicación borroso no está unívocamente determinado. Además podemos generalizar también los conectivos lógicos y obtener nuevos tipo de implicación como:

6.5.3 QM-Implicación

Dada una t-norma continua T, una S-conorma continua S y una negación N, se define una operación de QM-implicación como $I(x, y) = S(N(x), T(x, y))$ que es la forma de generalizar la expresión: $x'+x.y$.

6.5.4 Regla composicional de inferencia

Dado una estructura relacional borrosa (E, R) y una t-norma T se denomina **transformada lógica** sobre (E, R) a $L_R^T: [0, 1] \to [0, 1]$ definida por:

$$\mathbf{L_R{}^T:[\mu](\mathit{b}) = \mathit{Sup}_{\mathit{a}\in E}T(\mu(\mathit{a}), R(\mathit{a}, \mathit{b}))}$$

La transformada lógica es la aplicación de la regla composicional de inferencia de *Zadeh* y se utiliza para efectuar razonamiento aproximado de la forma

Si *x es P* entonces *y es Q*
x es P'

---

y es Q'

S. Cubillo demuestra en su memoria de doctorado los siguientes resultados para relaciones borrosas R reflexivas:

$\mu \subseteq L_R{}^T:[\mu]$

$\mu_1 \subseteq \mu_2 \Rightarrow L(\mu_1) \subseteq L(\mu_2)$

$\mu\in T(E,R) \Leftrightarrow L(\mu) =\mu$

Si R es un T-preorden y T es una t-norma continua entonces $L(L(\mu)) = L(\mu)$ y, por tanto, $L_R{}^T$ es un operador de consecuencias.

6.6. ESPACIOS MÉTRICOS GENERALIZADOS

Definición 6.6.1:

Se define un espacio métrico generalizado como (E, $\wp$, m) donde:

- E es un conjunto,
- $\wp$ = (A, S, ≤, e) es un semigrupo conmutativo y ordenado con elemento neutro e, y
- m es una **S-distancia generalizada**, es decir, aplicación m: E×E→A tal que:

1) $m(a, a) = e$ para todo $a \in \mathrm{E}$
2) $m(a, c) \leq \mathrm{S}(m(a, b), m(b, c))$ para todo $a, b, c \in \mathrm{E}$ (S-desigualdad triangular)

Sea T* la t-conorma dual de la t-norma T definida por $\mathrm{T}^*(x, y) = 1-\mathrm{T}(1-x, 1-y)$. Dada una estructura relacional (E, J) donde J es un T-preorden borroso, la función $d_J(a, b) = 1 - \mathrm{J}(a, b)$ es una T*-distancia generalizada en el espacio métrico generalizado (E, ([0,1], T*, ≤ 0), d_J), y se denomina **distancia lógica generalizada.** [Trillas & Alsina & Terricabras, 1995] (**Introducción a la lógica borrosa**. Enric Trillas, Claudi Alsina, Josep-Maria Terricabras. Editorial Ariel Matemática. 1995, Teorema 6.3.12. pag 211.).

Sea $\Im$*=([0, 1], T*, ≤, 0) un semigrupo conmutativo ordenado con elemento neutro 0. Los operadores residuales J^{T} son T-preordenes en la estructura relacional ([0,1], J^{T}), es decir,

1) $\mathrm{J}^{\mathrm{T}}(x, x)=1$ (J^{T} es reflexiva)

2) $\mathrm{T}(\mathrm{J}^{\mathrm{T}}(x, y), \mathrm{J}^{\mathrm{T}}(y, z)) \leq \mathrm{J}^{\mathrm{T}}(x, z)$ (J^{T} es T-transitiva)

de lo cual se deduce que

1) $1 - \mathrm{J}^{\mathrm{T}}(x, x) = 0$ (1)
2) $\mathrm{T}^*(1 - \mathrm{J}^{\mathrm{T}}(x, y), 1 - \mathrm{J}^{\mathrm{T}}(y, z)) \geq 1 - \mathrm{J}^{\mathrm{T}}(x, z)$ (2)

Por lo tanto $1-\mathrm{J}^{\mathrm{T}}$ es una T*-distancia generalizada en el espacio métrico generalizado ([0,1], $\Im$*, $1-\mathrm{J}^{\mathrm{T}}$).

6.7. INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE MEDIDA BORROSA

6.7.1. INTRODUCCIÓN

El concepto de medida es uno de los más importantes en el mundo de las Matemáticas, así como el concepto de integral respecto de una medida. La principal característica de las medidas clásicas es la propiedad aditiva, que puede ser muy efectiva y conveniente en ciertas aplicaciones, pero también puede resultar demasiado inflexible y rígida en otros contextos en los que puede ser útil definir medidas no aditivas (o medidas difusa) que ya se han aplicado en una amplia gama de disciplinas como la teoría de subconjuntos borrosos, inteligencia artificial, teoría de juegos, teoría de la decisión, psicología o economía, y es uno de los campos matemáticos donde queda mucho por explorar y que tiene muchísimas aplicaciones potenciales. El concepto de medida borrosa (o de medida difusa) aún puede generalizarse más si se pretende medir una cualidad o una característica que no esté directamente relacionada con la inclusión conjuntista, pero de la que sí se pueda afirmar que "x tiene esa cualidad menos que y", es decir, se tiene una relación de preorden.

El término integral borrosa (o integral difusa) se emplea para integrales respecto a medidas borrosas. Se han desarrollado varias propuestas de integrales borrosascomo la de *Gustave Choquet* de 1974. Otros conceptos de integral borrosa han sido utilizados en diferentes áreas de conocimiento, por ejemplo la desarrollada por *Michio Sugeno* en 1974 en el área de la teoría de los subconjuntos borrosos o como la desarrollada por *David Schmeidler* en 1982 en el área de la teoría de la decisión. La integral de *Choquet* fue propuesta por primera vez para la teoría de subconjuntos borrosos por *Ulrich Holle* en 1982 en los '*Proceedings of IFAC Symposium on Theory and Application of Digital Control*'.

Preliminares

Un **espacio medible** es una pareja (X, $\wp$) donde X es un conjunto y $\wp$ es una **σ-álgebra** o conjunto de subconjuntos de X tal que:

1. $X \in \wp$.

2. Sea A un subconjunto de X. Si $A \in \wp$ entonces su complementario $A' \in \wp$.

3. Si $A_n \in \wp$ entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \wp$.

Cuando X es el conjunto de los números reales, y $\wp$ es la σ-álgebra que contiene a los subconjuntos abiertos se dice que $\wp$ es la σ-álgebra de *Borel*, y se la denota por B.

Observación:

En el concepto clásico de medida se considera $\wp \subseteq \{0, 1\}^X$ un subconjunto de partes de X. Pero también de forma análoga se puede denotar como $\Im$ a un subconjunto de conjuntos borrosos de X, $\Im \subseteq [0, 1]^X$, que verifique las propiedades necesarias para que $([0, 1]^X, \Im)$ sea un espacio medible.

6.7.2. MEDIDAS ADITIVAS

Definición 6.7.2.1:

Sea (X, $\wp$) un espacio medible. Una función m: $\wp \to [0, \infty)$ es una medida σ-aditiva si:

1. $m(\emptyset) = 0$.

2. Si A_n, n = 1, 2, ... es una colección de subconjuntos disjuntos que pertenecen a $\wp$ entonces

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

A esta última propiedad se le denomina **σ-aditividad**. Cuando sólo se requiere la propiedad σ-aditiva para un conjunto finito de subconjuntos A_n, entonces a esta propiedad se le denomina **aditividad**.

Ejemplo 1: Probabilidad

Un **espacio probabilistico** es una terna $(X, \wp, p)$ donde la probabilidad p es una medida σ-aditiva tal que $p(X)=1$ y $p(A)=1-P(A')$ para todo subconjunto $A\in \wp$. Las medidas de probabilidad p sobre (R, B) pueden ser definidas en términos de su función de densidad (o función de masa), que es una función $f: R\rightarrow[0,\infty)$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$ (o en el caso discreto $\Sigma p(x_i)=1$).

Ejemplo 2: Medidas de Lebesgue

Las medidas definidas por *Henry Lebesgue* datan del 1900 y constituyen una de las piedras angulares de las Matemáticas del siglo XX.

Pretenden generalizar el concepto de longitud de un segmento. En un segmento se tiene que:

Si $[c, d] \subset \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$ entonces $d - c \leq \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$

Medida exterior de Lebesgue

Sea A un subconjunto de la recta real. Se consideran todas las familias numerables posibles de intervalos semiabiertos y semicerrados tales que $\{[a_i,b_i): i\in N, A\subseteq\cup[a_i, b_i), b_i-a_i\leq\varepsilon, \forall i\}$. Se llama **medida exterior de *Lebesgue*** a $\overline{\boldsymbol{L}}(A) = \inf \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)$ tales que $A\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$

- Si A es un intervalo entonces su medida exterior de *Lebesgue* es la longitud del intervalo
- La medida exterior de *Lebesgue* del conjunto vacío es cero
- Si un conjunto está contenido en otro su medida exterior de *Lebesgue* es menor que la del otro.
- $\overline{\boldsymbol{L}}(\bigcup_{n\in N} A_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\overline{\boldsymbol{L}}(A_n)$
- Si A es un subconjunto de la recta real entonces $\overline{\boldsymbol{L}}(A) = \inf\{\overline{\boldsymbol{L}}(U): U\supset A, U \text{ abierto}\}$, es decir, la medida exterior de *Lebesgue* viene aproximada por la medida exterior de *Lebesgue* de los abiertos que contienen al conjunto.

Medida interior de Lebesgue

Si A es un subconjunto de la recta real se llama **medida interior de *Lebesgue*** a

$$\underline{\boldsymbol{L}}(A) = \sup \{ \underline{\boldsymbol{L}}(K): K\subset A, K \text{ compacto}\}$$

- Si A es un intervalo entonces su medida interior de *Lebesgue* es la longitud del intervalo
- La medida interior de *Lebesgue* de un conjunto es siempre menor o igual que su medida exterior de *Lebesgue*

Medida de Lebesgue

Un conjunto A se dice **medible según *Lebesgue*** cuando coinciden su medida interior y exterior de *Lebesgue*.

- Los conjuntos compactos son medibles según *Lebesgue*
- Los conjuntos abiertos son medibles según *Lebesgue*
- Sea A es un subconjunto de la recta real. A es medible según *Lebesgue* si y sólo si para todo $\varepsilon>0$ existe un abierto U y un cerrado F tal que $U \supset A \supset F$, y la medida de *Lebesgue* de U/F es menor que ε.
- El vacío y $\mathfrak{R}$ son medibles *Lebesgue*
- Si A es medible su complementario también lo es
- Si A y B son medibles entonces la unión, la intersección, la diferencia también lo son

La medida de *Lebesgue* L es una medida σ-aditiva pues verifica que:

Si A_n, n = 1, 2, ... es una colección de subconjuntos disjuntos que pertenecen a $\wp$ entonces

$$L(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} L(A_n)$$

6.7.3 MEDIDAS NORMALES

Definición 6.7.3.1:

Sea (X, $\wp$) un espacio medible. Una medida m: $\wp \rightarrow [0, 1]$ es una medida normal si existen un subconjunto minimal A_0 y otro maximal A_m de $\wp$ tal que:

1. $m(A_0) = 0$.

2. $m(A_m) = 1$.

Ejemplo

Las medidas de probabilidad sobre un espacio (X, $\wp$) son medidas normales con $A_0=\varnothing$ y $A_m=X$. Las medidas de *Lebesgue* no son necesariamente normales.

6.7.4 MEDIDAS CONVERGENTES DE SUGENO

Definición 6.7.4.1:

Sea $\wp$ una σ-álgebra sobre un universo X. Una **medida borrosa según *Sugeno*** g: $\wp \rightarrow [0, 1]$ es una función que verifica las siguientes propiedades:

1. $g(\varnothing) = 0$, $g(X) = 1$.

2. Dados A, B$\in \wp$, si $A \subseteq B$ entonces $g(A) \leq g(B)$.

3. Si $A_n \in \wp$ y $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ entonces $\lim_{n\rightarrow\infty} g(A_n) = g(\lim_{n\rightarrow\infty} A_n)$

A esta última propiedad se la denomina **convergencia de *Sugeno***.

Las medidas de *Sugeno* [Murofushi and Sugeno; 1989, pp. 201] son monótonas y su principal característica es que no imponen la propiedad aditiva.

Banon [1981] muestra que varias medidas sobre álgebras finitas como la probabilidad, las funciones de credibilidad o las medidas de plausibilidad son medidas borrosas según Sugeno.

Zadeh [1978] introduce el concepto de distribución de posibilidad y la noción de medida de posibilidad, que son un tipo de medidas borrosas según *Sugeno*.

Ejemplo 3: Teoría de la evidencia.

La teoría de la evidencia se basa en dos medida duales no aditivas: las **medidas de credibilidad** y las **medidas de plausibilidad**.

Definición 6.7.4.2:

Dado un espacio medible (X, $\wp$), una **medida de credibilidad** (en inglés, *belief measure*) es una función Cred: $\wp \rightarrow [0, 1]$ tal que

1. Cred($\emptyset$) = 0.
2. Cred(X) = 1.
3. Cred(A$\cup$B) $\geq$ Cred(A) + Cred(B).

A esta última propiedad se le denomina **superaditividad**. Cuando X es infinito se requiere la continuidad superior de la función Cred. Para cada A$\in \wp$ se puede interpretar Cred(A) como el grado de credibilidad de que un cierto elemento pertenezca al conjunto A.

De la definición de medida de credibilidad se deduce el siguiente resultado:

$$\text{Cred}(A) + \text{Cred}(A') \leq 1.$$

Para cada medida de credibilidad se puede definir su medida dual de plausibilidad, que se define como:

$$\text{Pl}(A) = 1 - \text{Cred}(A').$$

Definición 6.7.4.2:

Dado un espacio medible (X, $\wp$) una **medida de plausibilidad** es una función Pl: $\wp \rightarrow [0, 1]$ tal que

1. Pl($\emptyset$) = 0.

2. $Pl(X) = 1$.

3. $Pl(A \cup B) \leq Pl(A) + Pl(B)$.

A esta última propiedad se le denomina **subaditividad**. Cuando X es infinito se requiere la continuidad inferior de la función Pl. Las medidas de plausibilidad verifican que:

$$Pl(A) + Pl(A') \geq 1.$$

Las medidas de credibilidad y plausibilidad están definidas por una función m: $\wp \to [0, 1]$ tal que $m(\emptyset) = 0$ y $\sum_{A \in \wp} m(A) = 1$ donde m representa la proporción que muestra una determinada evidencia de que un cierto elemento de X pertenezca a un subconjunto A.

Nota:

La medida exterior de Lebesgue es una medida subaditiva, que no verifica que $\overline{\boldsymbol{L}}(X) = 1$. La medida interior de *Lebesgue* es una medida superaditiva que no verifica que $\underline{\boldsymbol{L}}(X) = 1$.

Ejemplo 4: Teoría de la Posibilidad

La teoría de la posibilidad es una rama de la teoría de la evidencia donde a las medidas de plausibilidad se les impone la condición de que $Pl(A \cup B) = \max\{Pl(A), Pl(B)\}$ en cuyo caso se les denomina **medidas de posibilidad**. A las medidas de credibilidad se les impone la condición de que $Cred(A \cap B) = \min\{Cred(A), Cred(B)\}$ y se les denomina **medidas de necesidad**.

Definición 6.7.4.3: [Zadeh; 1978, Higashi & Klir; 1983]

Sea $(X, \wp)$ un espacio medible. Una **medida de posibilidad** es una función Π: $\wp \to [0, 1]$ que verifica las siguientes propiedades:

1. $\Pi(\varnothing) = 0$, $\Pi(X) = 1$.

2. $A \subseteq B \Rightarrow \Pi(A) \leq \Pi(B)$

3. $\Pi(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sup_{i \in I} \{\Pi(A_i)\}$ dado un conjunto de índices I.

Se observa que una medida de posibilidad es normal y tiene la propiedad de la subaditividad.

Definición 6.7.4.5:

Sea (X, $\wp$) un espacio medible. Una **medida de necesidad** es una función Nec: $\wp \rightarrow [0, 1]$ que verifica las siguientes propiedades:

1. $Nec(\varnothing) = 0$, $Nec(X) = 1$.

2. $A \subseteq B \Rightarrow Nec(A) \leq Nec(B)$

3. $Nec(\bigcap_{i \in I} A_i) = \inf_{i \in I} \{Nec(A_i)\}$ dado un conjunto I.

Nota

Como las medidas de posibilidad son medidas de plausibilidad y las medidas de necesidad son medidas de credibilidad, se verifica que:

1. $\Pi(A) + \Pi(A') \geq 1$.
2. $Nec(A) + Nec(A') \leq 1$.
3. $Nec(A) = 1 - \Pi(A')$.
4. $\max\{\Pi(A), \Pi(A')\} = 1$.
5. $\min\{Nec(A), Nec(A')\} = 0$.
6. $Nec(A) > 0 \Rightarrow \Pi(A) = 1$.
7. $\Pi(A) < 1 \Rightarrow Nec(A) = 0$.

La teoría de posibilidad se formula también sobre subconjuntos borrosos donde $\wp$ es una familia de subconjuntos borrosos de X que verifican las propiedades indicadas.

De forma análoga a que una medida de probabilidad viene definida mediante una función de masa o una función de densidad, una medida de posibilidad viene definida por una función o **distribución de posibilidad** f: $X \to [0, 1]$ de la siguiente forma:

$$\Pi(A) = \sup_{x \in A} \{f(x)\} \text{ para todo } A \subseteq X$$

La distribución de posibilidad f se define como:

$$f(x) = \Pi(\{x\}) \text{ para todo } x \in X.$$

Nota:

Una medida de posibilidad no es siempre una medida borrosa de *Sugeno* [Puri & Ralescu 1982]. Sin embargo una distribución de posibilidad normal sobre un universo finito X es una medida borrosa de *Sugeno*.

Ejemplo de medida de posibilidad

Sea X = {0, 1, ..., 10} el conjunto de posibles resultados en un examen, y sea la distribución de posibilidad $f(x) = \Pi(\{x\})$ = la posibilidad de que x sea una calificación cercana al sobresaliente, definida por:

X	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$\Pi(\{x\})=f(x)$	0	0	0	0	0	0.1	0.2	0.5	0.7	1	1

Sea $\Pi(A)$ la posibilidad de que A contenga alguna calificación cercana al sobresaliente, definida por

$$\Pi(A) = \sup_{x \in A} \Pi(\{x\}) = \sup_{x \in A} f(x)$$

Se observa que $\Sigma\, \Pi(\{x\}) \geq 1$.

Si A = {5, 6, 8} entonces:

$$\Pi(A) = \sup_{x \in A} f(x) = \sup \{f(5), f(6), f(8)\} = \sup \{0.1, 0.2, 0.7\} = 0.7.$$

Teoría de posibilidad versus teoría de probabilidades

La teoría de posibilidad propuesta por *Zadeh* es una forma de tratar la incertidumbre alternativa a la teoría de probabilidades que permite tratar contextos más amplios que las álgebras booleanas de la teoría de probabilidades.

La teoría de posibilidad se basa en la imprecisión, intrínseca por ejemplo en los lenguajes naturales, mientras que la teoría de probabilidades se basa en la aleatoriedad.

En teoría de posibilidad se tratan proposiciones de la forma 'X es A', donde X es el nombre de un objeto, una variable o una proposición y A es el conjunto borroso que representa, por ejemplo, 'joven' o 'grande'. En la proposición 'Antonio es joven', Antonio es un objeto del conjunto X, y en la proposición '*x* es un entero grande', *x* es el nombre de una variable del conjunto X.

Ejemplo 5: [Zadeh; 1978]

Considérese la proposición 'Antonio se toma x tostadas para desayunar', donde x toma valores de X = {1, 2, ...}. A la variable x se le puede asociar tanto una distribución de posibilidad como una distribución de probabilidad. La distribución de posibilidad se puede interpretar como un grado de que sea posible que Antonio se coma x tostadas, mientras que la distribución de probabilidad se determina tras estudiar cuantas tostadas se come Antonio durante, por ejemplo, cien días.

Las distribuciones de posibilidad y probabilidad podrían ser las siguientes:

X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Π({x})	1	1	1	1	0.8	0.6	0.4	0,2
P({x})	0.1	0.8	0.1	0	0	0	0	0

Obsérvese que la distribución de posibilidad no tiene la restricción de las funciones de masa estadísticas de que la suma de la distribución de los elementos de X sea uno. La probabilidad se encuentra con dificultades técnicas a la hora de que se tuviese una distribución uniforme sobre un espacio muestral infinito, por ejemplo $[0, \infty)$, pues su función de densidad debe verificar que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, mientras que una distribución de posibilidad reflejaría sin problemas que todos los puntos de $[0, \infty)$ fuesen igualmente posibles.

Zadeh [1978] sostiene en su principio de consistencia posibilidad/probabilidad que un evento que no sea posible tampoco debe ser probable, aunque un evento altamente posible no es necesariamente altamente probable.

Otro enfoque relativo al concepto de posibilidad es contemplado en la teoría de la evidencia de *Shafer* [1976] en que la probabilidad de un elemento o conjunto está relacionada con la de su contrario. La teoría de *Shafer* es de naturaleza probabilística, pero contempla el concepto de 'probabilidad alta' y 'probabilidad baja' que están relacionadas con las medidas de posibilidad y necesidad en el sentido de que para todo suceso A se tiene que $Nec(A) \leq P(A) \leq \Pi(A)$.

En resumen, la teoría de subconjuntos borrosos, la teoría de posibilidad y la teoría de probabilidad no son mutuamente excluyentes, sino que se complementan unas a otras. Las teorías de posibilidad y probabilidad se definen sobre unas estructuras y operaciones determinadas, mientras que la teoría de subconjuntos borrosos ofrece la posibilidad de utilizar diversos operadores de unión e intesección y diversos tipos de conjuntos borrosos, por los que parece más adaptable a diferentes contextos.

6.7.5 MEDIDAS MONÓTONAS: Medidas Borrosas.

Definición 6.7.5.1: [Nguyen & Walker, 1996, 183]

Sea (X, $\wp$) un espacio medible. Una función m: $\wp \rightarrow [0, \infty)$ es una medida borrosa (o medida monótona) si:

1. $m(\emptyset) = 0$.
2. Si A, B$\in \wp$ y $A \subseteq B$ entonces $m(A) \leq m(B)$.

A esta última propiedad se le denomina **monotonía**.

Ejemplo

Todas las medidas σ-aditivas, como por ejemplo las medidas de probabilidad y las medidas de necesidad son medidas monótonas.

Las medidas borrosas de Sugeno, como por ejemplo las medidas de posibilidad, son medidas monótonas.

Ejemplo 6:

Las **medidas de μ-T-incondicionalidad** de relaciones borrosas descritas en el capítulo 2 son medidas monótonas sobre el espacio medible ($\mathfrak{R}$, $\mathfrak{I}$, M) donde $\mathfrak{R}$ es el conjunto de relaciones borrosas R: $E_1 \times E_2 \rightarrow [0, 1]$, $\mathfrak{I}$ es el subconjunto de partes de $\Re$ que sean medibles, y M es una medida de μ-T-incondicionalidad.

6.7.5.1 Representación gráfica de los ejemplos de medida

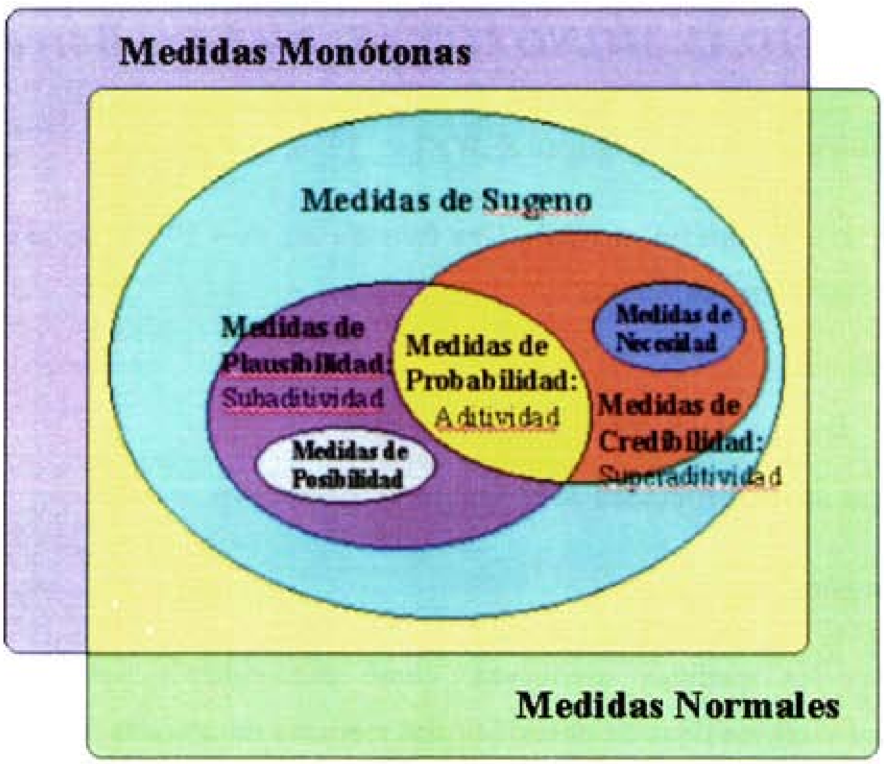


Fig 6.7.1: Medidas monótonas y normales

Ejemplo 7: λ-medidas borrosas de Sugeno

Sugeno [1974] introdujo el concepto de λ-medida borrosa como una medida normal con la propiedad de λ-aditividad. Las λ-medidas borrosas son medidas monótonas (es decir, medidas borrosas).

Definición 6.7.5.2:

Sea $\lambda \in (-1, \infty)$ y sea $(X, \wp)$ un espacio medible. Una función g_λ: $\wp \rightarrow [0, 1]$ es una **λ-medida borrosa** si para todo par A, B de subconjuntos disjuntos de $\wp$ se tiene que: $g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda g_\lambda(A)\, g_\lambda(B)$.

Ejemplo 8

Si $\lambda = 0$ entonces la λ-medida borrosa es una medida aditiva, como por ejemplo, una medida de probabilidad.

Ejemplo 9: medidas S-descomponibles

Weber [1984] propuso las medidas S-descomponibles, que generalizan tanto a las λ-medidas borrosas como a las medidas de posibilidad.

Definición 6.7.5.3:

Sea S una t-conorma. Dado un espacio medible $(X, \wp)$, una **medida S-descomponible** es una función m: $\wp \rightarrow [0, 1]$ tal que

1. $m(\varnothing) = 0$.
2. $m(X) = 1$.
3. Para todo par de subconjuntos A, B disjuntos de $\wp$ se tiene que

$$m(A \cup B) = S(m(A), m(B)).$$

A esta última propiedad se le denomina ***S-aditividad***.

Ejemplo 10:

Las medidas de probabilidad son medidas W^*-descomponibles, donde W^* es la t-conorma de *Łukasiewicz*.

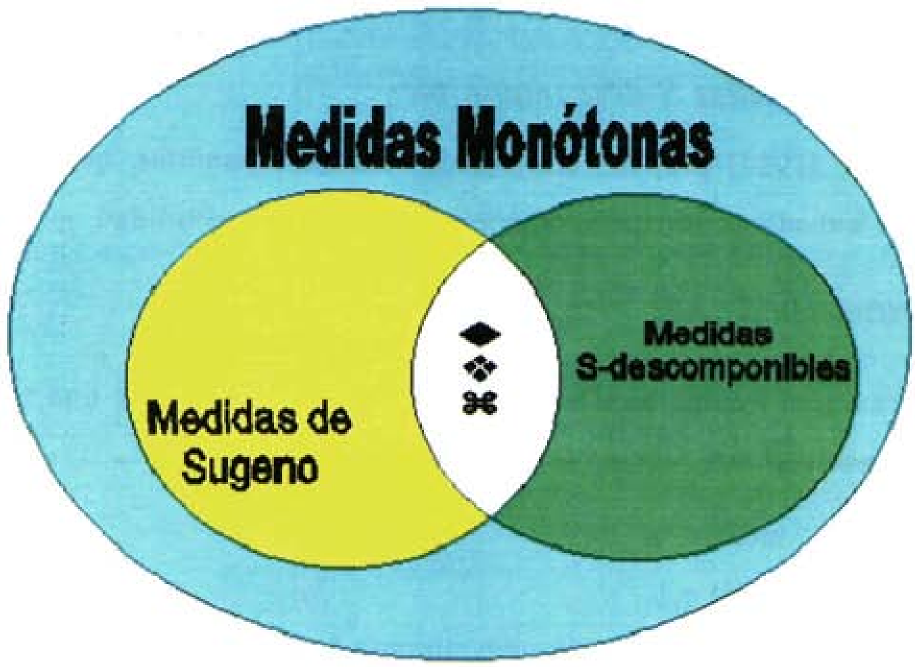
Las medidas W^*_λ-descomposibles donde W^*_λ es la t-conorma definida por $W^*_\lambda(x, y) = x + y + \lambda xy$ son λ-medidas borrosas.

Corolario 6.7.5.1:

Sea m una medida S-descomponible sobre (X, $\wp$). Si X es finito entonces para todo subconjunto A de $\wp$ se tiene que:

$$m(A) = \underset{x \in A}{S} \{m(\{x\})\}$$

6.7.5.2 Representación gráfica



◆ **λ-medidas borrosas de *Sugeno***

❖ **Medidas de posibilidad**

⌘ **Medidas de probabilidad**

Fig. 6.7.2: Relación entre las medidas S-descomponibles y las medidas de *Sugeno*

6.7.6 MEDIDAS MONÓTONAS RESPECTO DE UN PREORDEN: $\prec$-medida borrosa

En *Trillas y Alsina* [Trillas & Alsina; 1999] encontramos una definición más general de medida borrosa. Si se quiere medir una característica de los elementos de un conjunto X, como su volumen o su superficie o su peso, es preciso partir de una relación de comparación que permita decir si "x muestra esa característica menos que y" para todo x e y de X, lo que expresaremos con $x \prec y$. Esta relación debe tener las propiedades reflexiva y transitiva, luego debe ser un preorden. Se define una $\prec$-medida borrosa como:

***Definición 6.7.6.1*: $\prec$-Medida borrosa según Trillas**

Sea $\prec$ un preorden y sea **0** un elemento minimal y sea **1** un elemento maximal de X para dicho preorden $\prec$, entonces una aplicación m: $\wp \to [0, 1]$ es una **$\prec$-medida borrosa** si:

1. m(**0**)=0
2. m(**1**)=1
3. Si $x \prec y$ entonces $m(x) \leq m(y)$.

Ejemplos de $\prec$-medidas borrosas.

Todas las medidas vistas anteriormente, conocidas como medidas monótonas o medidas borrosas, son medidas monótonas respecto del preorden inclusión (considerando tanto inclusión entre conjuntos clásicos como inclusión entre conjuntos borrosos).

Es sencillo comprobar que esta definición generaliza el concepto de medida borrosa dado por *Sugeno* [Sugeno; 1974], pues si $\wp$ es un retículo con un orden parcial entonces $x \prec y$ si y sólo si $x \wedge y = x$, y se verifican las tres propiedades. Si el retículo es ortocomplementado existe la función dual m*(x)=1−m(x') que es también una $\prec$-medida borrosa.

La medida de probabilidad definida en un Álgebra de *Boole* es también una $\prec$-medida borrosa.

Ahora $\wp$ puede ser el conjunto de los subconjuntos borrosos de un conjunto y la entropía borrosa introducida por *De Luca* y *Termini* [1972], o las medidas de posibilidad o de necesidad [Higashi & Klir; 1983] son también $\prec$-medidas borrosas.

Ejemplo 10: Entropía o medida de borrosidad.

Sea X un conjunto y sea $\wp$ el conjunto de subconjuntos borrosos sobre X. Las medidas de borrosidad o **entropías** dan a cada conjunto borroso de $\wp$ el grado en que un conjunto es borroso.

Algunas de estas medidas vienen influenciadas por la entropía probabilística de *Shannon*, utilizada como medida de información.

De Luca y Termini [1972] consideran las entropías como una medida de $\wp$ en $[0, \infty]$ que verifican una serie de propiedades. *Kaufmann* [1975] propone un índice de borrosidad como una distancia normalizada. Otros autores como *Yager* [1979] o *Higashi* y *Klir* [1983] basan su concepto de medida de borrosidad en la diferencia entre un conjunto borroso y su complementario.

Según *De Luca y Termini* [1972] una entropía o medida de borrosidad E debe verificar las siguientes propiedades:

1. E(A) = 0 si A es un conjunto clásico.

2. E(A) es maximal si A es el conjunto constante tal que A(x) = $\frac{1}{2}$ para todo $x \in X$.

3. E(A) ≥ E(B) si A es 'más borroso' que B según el orden 'sharped', es decir, si B(x) ≤ A(x) cuando A(x) ≤ $\frac{1}{2}$ y B(x) ≥ A(x) si A(x) ≥ $\frac{1}{2}$.

4. E(A) = E(A').

Ejemplo 11: Medidas de especificidad.

En el capítulo 3 se describen las medidas de especificidad, que verifican que m(∅)=0, m({x})=1 y si A es menos específico que B entonces m(A)≤m(B).

Ejemplo 12: Medida de Sarkovskii

Sea X el conjunto de los números naturales y definimos sobre ellos una función *m* a la que podemos denominar *aproximadamente par*, definida por:

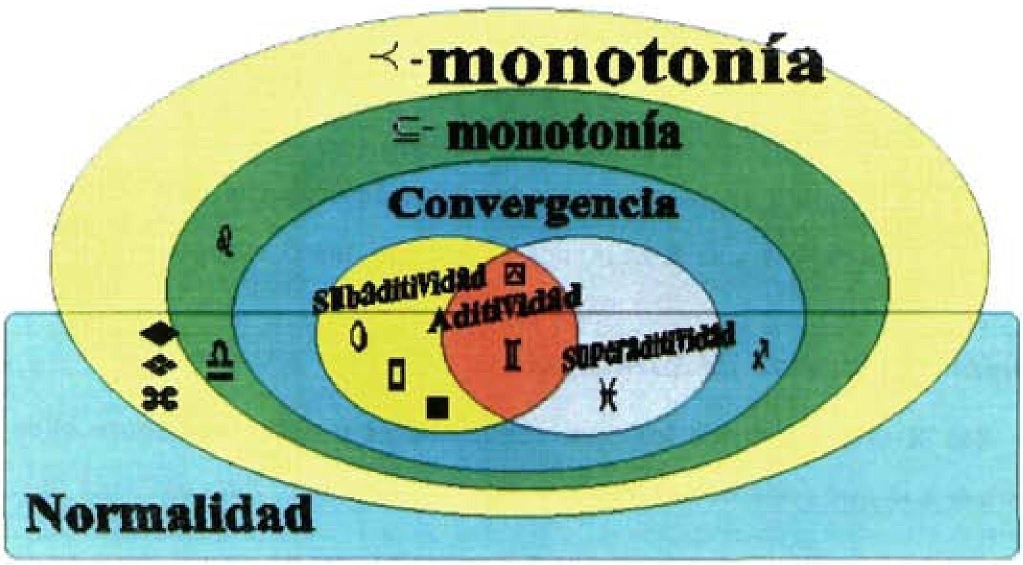
$$m(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2^k \text{ para } k = 0,1,2\ldots \\ 0 & \text{si } n = 2^k + 1 \text{ para } k = 1,2\ldots \\ 1 - \dfrac{1}{2^k} & \text{si } n = 2^k(2p+1) \text{ para } k = 1,2\ldots\ p = 1,2\ldots \end{cases}$$

Obviamente *m* no es una medida en los número naturales con el orden usual, pero si consideramos el orden de *Sarkovskii* que tan importante es en el estudio de los sistemas dinámicos:

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec \ldots \prec 2.3 \prec 2.5 \prec \ldots \prec 2^2.3 \prec 2^2.5 \prec \ldots \prec 2^3.3 \prec 2^3.5 \prec \ldots\ 2^3.3 \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1$$

en el que el mínimo elemento es 3 seguido de todos los números impares, y el máximo elemento es 1 precedido por las potencias de dos, entonces *m* si define una medida borrosa en los números naturales.

6.7.6.1 Representación gráfica sobre propiedades de medidas



- ◆ **Medidas de Entropía**
- ❖ **Medidas de especificidad**
- ⌘ **Medida de T-Transitividad**
- ♎ **Medidas de μ-T-incondicionalidad**
- ○ **Medidas de Plausibilidad**
- □ **Medidas S-descomponibles de *Sugeno***
- ■ **λ-Medidas de *Sugeno***
- ⍓ **Medidas de *Lebesgue***
- ♊ **Medidas de Probabilidad**
- ♓ **Medidas de Necesidad**
- ♐ **Medidas de Sugeno**

Fig. 6.7.3: Propiedades de medidas

6.7.7. INTEGRALES BORROSAS

6.7.7.1 INTEGRAL DE LEBESGUE

Sea (X, A, M) un espacio medible donde M es una medida σ-aditiva. Si f es una función positiva (f: X → [0, +∞]) entonces su integral de *Lebesgue*, respecto de la medida M es:

$$(L)\int_X f(w).dM(w) = \int_0^{\infty} M(f(x) > \alpha).d\alpha$$

Por tanto si A es un subconjunto borroso de X entonces su integral de *Lebesgue* respecto de la medida σ-aditiva M es:

$$(L)\int_X A(w).dM(w) = \int_0^1 \mathrm{M}(\mathrm{A}(\mathrm{x}) > \alpha).\mathrm{d}\alpha = \int_0^1 \mathrm{M}(\mathrm{A}_\alpha).\mathrm{d}\alpha$$

6.7.7.2. INTEGRAL DE SUGENO

Sea (X, A, M) un espacio medible donde M es una medida σ-aditiva. Si A es un subconjunto borroso (A: X → [0, 1]) entonces su integral borrosa según *Sugeno*, respecto de la medida M es:

$$(S)\int_X A(w).dM(w) = \sup_{\alpha\in[0,1} \{\mathrm{Mín}(\alpha, \mathrm{M}(\mathrm{A}_\alpha))\}$$

Se observa que se obtiene reemplazando la suma y la multiplicación de los números reales por su supremo y su ínfimo respectivamente en la fórmula de la integral de *Lebesgue* sobre la recta real.

Propiedad 1:

Si A está contenido en B entonces la integral de *Sugeno* de A es menor o igual que la integral de *Sugeno* de B.

Propiedad 2:

Si A es un conjunto clásico su integral de *Sugeno* es M(A)

Por tanto la integral de *Sugeno* es una generalización de la medida de *Lebesgue*, pero no generaliza a la integral de *Lebesgue*.

Nota: La integral de *Sugeno* puede generalizarse con la expresión:

$$(S)\int_X A(w).dM(w) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \{T(\alpha, M(A_\alpha))\}$$

6.7.7.3. INTEGRAL DE CHOQUET

Si la medida utilizada no es una medida σ-aditiva, sino que es una medida borrosa con la propiedad de la convergencia de *Sugeno*, o una medida borrosa [Nguyen & Walker: 1996], es decir, monótona creciente respecto la inclusión, entonces la medida de *Lebesgue* se generaliza, y la integral borrosa se obtiene como una generalización de la integral de *Lebesgue*.

Definición:

Sea (X, M) un espacio borroso medible, donde M es una medida borrosa (según Nguyen). Sea f una función positiva (f: X → [0, +∞]) entonces su integral de *Choquet*, respecto de la medida borrosa M es:

$$(C)\int_X f(w).dM(w) = \int_0^\infty M(f(x) > \alpha).d\alpha$$

Por tanto si A es un subconjunto borroso de X entonces su integral de *Choquet* respecto de la medida borrosa M es:

$$(C)\int_X A(w).dM(w) = \int_0^1 \mathrm{M(A(x) > \alpha).d\alpha} = \int_0^1 \mathrm{M(A_\alpha).d\alpha}$$

BIBLIOGRAFÍA

[1]. C. Alsina; E. Trillas y L. Valverde, *On some logical connectives for fuzzy sets theory*. J. Math. Anal. Appl. 93 (1983), 1, pp. 15-26.

[2]. C. Alsina; J. L. Castro y E. Trillas, *On the Characterization of S and R Implications*. Proc. VI International Fuzzy Systems Association World Congress. 1995, pp. 317-319.

[3]. G. Banon, *Distinction between several subsets of fuzzy measures*. Fuzzy Sets and Systems 5, (1985), pp 291-305.

[4]. G. Barbieri y H. Weber, *A topological approach to the study of fuzzy measures*. In: Functional Analysis and Economic Theory, Springer, Berlin (1998), pp. 17-46.

[5]. N. Batle-Nicolau y E. Trillas, *Entropy and fuzzy integral*. J. Math. Anal. Appl. 69 (1979), 2, pp. 469-474.

[6]. D. Bhandari y N. R. Pal, *Some new information measure of fuzzy sets*. Inform. Sci. 67 (1993), pp. 209-228.

[7]. P. Burillo; R. Bravo; A. Salvador, *Relación de predominancia en normas y conormas triangulares generalizadas*. XIV Jornadas Hispano-Lusas. (1989), pp. 765-769.

[8]. P. Burillo y H. Bustince, *Entropy on intuitionistic fuzzy sets and on interval-valued fuzzy sets*. Fuzzy Sets and Systems 78 (1996), pp. 305-316.

[9]. D. Butnariu, *Additive fuzzy measures and integrals* I. J. Math. Anal. Appl. 93 (1983), pp. 436-452.

[10]. D. Butnariu, *Fuzzy measurability and integrablity*. J. Math. Anal. Appl. 117 (1986), pp. 385-410.

[11]. L. M. de Campos y M. J. Bolaños, *Characterization and comparison of Sugeno and Choquet integrals*. Fuzzy Sets and Systems 52 (1992), pp. 61-67.

[12]. J. L. Castro y E. Trillas, *Sobre preórdenes y operadores de Consecuencia de Tarski*. Theoria, 11. (1989), pp. 419-425.

[13]. J. L. Castro y E. Trillas, *Tarski's Fuzzy Consequences*. Proc. of the International Fuzzy Engineering Symposium. (1991), pp. 70-81.

[14]. J. L. Castro, E. Trillas y S. Cubillo, *On consequence in approximate reasoning*. J. Appl. Non Classical Logics 4 (1994), 1, pp. 91-103.

[15]. G. Choquet, *Theory of capacities*. Ann. Inst. Fourier, 5 (1955), pp. 131-295.

[16]. A. De Luca y S. Termini, *A definition of a non-probabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory*. Information and Control 20, (1972), 4, pp. 301-312.

[17]. D. Denneberg, **Non-additive Measure and Integral**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1994).

[18]. L. Drewnowski, *On the continuity of certain non-additive set functions*. Colloquium Math. 38 (1978), pp. 243-253.

[19]. D. Dubois y H. Prade, **Fuzzy Sets and Systems. Theory and its Applications.** Academic Press, New York, (1980).

[20]. D. Dubois y H. Prade, *Triangular norms for fuzzy sets*. Prod. second int. sem. of Fuzzy Sets Theory. J. Kepler Univ. Linz, Austria, (1980), pp. 43-61.

[21]. D. Dubois y H. Prade, *A class of fuzzy measures based on triangular norm. A general framework for the combinations of uncertain information*. Int. J. Gen. Syst. 8, 1, (1982), pp. 43-61.

[22]. D. Dubois; H. Prade, *The principle of minimum specificity as a basis for evidential reasoning*. In: Uncertainty in Knowledge-based Systems, Bouchon, B. & Yager R. R. (Eds.). Springer-Verlag, Berlin, (1987), pp. 75-84.

[23]. D. Dubois y H. Prade, *A note on measures of specificity for fuzzy sets*. International Journal of General Systems 10, (1995), pp. 279-283.

[24]. D. Dubois; H. Prade, y R. R. Yager, **Fuzzy Information Engineering: A guided tour of applications.** John Wiley & Sons, New York. (1997).

[25]. H. Fremlin, **Topological Riesz Spaces and Measure Theory**. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1974).

[26]. S. Fukami, M. Mizumoto y K. Tanaka, *Some considerations on fuzzy conditional inference*. Fuzzy Sets and Systems 4 (1980), pp. 243-273.

[27]. L. Garmendia, *μ-T-Condicionalización de una relación difusa. Medida de μ-T-Condicionalidad.* Actas Estylf'97. (1997), pp. 281-286.

[28]. L. Garmendia; E. Trillas y A. Salvador, *Sobre "medir" la condicionalidad.* Actas Estylf'98. (1998), pp. 57-62.

[29]. L. Garmendia; C. Campo; S. Cubillo y A. Salvador, *A Method to Make Some Fuzzy Relations T-Transitive*. International Journal of Intelligence Systems. Vol. 14, NO 9, September 1999. 14 (9) pp. 873-882.

[30]. L. Garmendia; R. R. Yager; E. Trillas y A. Salvador, *On t-norms based specificity measures*. Fuzzy Sets and Systems. Aceptado para publicar.

[31]. M. Grabisch, T. Murofushi y M. Sugeno, *Fuzzy measure of fuzzy events defined by fuzzy integrals*. Fuzzy Sets and Systems 50 (1992), pp. 293-313.

[32]. M. Grabisch; T. Murofushi y M. Sugeno, **Fuzzy Measures and Integrals Theory and Applications.** Physica-Verlag. (2000).

[33]. M. Ha y X. Wang, *Some notes on the regularity of fuzzy measures on metric spaces*. Fuzzy Sets and Systems 87 (1997), pp. 385-387.

[34]. P. R. Halmos, **Measure Theory**, Van Nostrand, Princeton, NJ (1962). Van Nostrand Reinhold, New York, (1968).

[35]. M. Higashi y G. J. Klir, *Measures of uncertainty and information based on possibility distributions*. International Journal of General Systems 9, (1983), pp. 3-58.

[36]. L. C. Jang y J. S. Kwon, *On the representation of Choquet integrals of set-valued functions, and null sets*, Fuzzy Sets and Systems, 112, (2000), pp. 233-239.

[37]. Q. Jiang y H. Suzuki, *Fuzzy measures on metric spaces*. Fuzzy Sets and Systems 83 (1996), pp. 99-106.

[38]. G. Klir y T. A. Folger, **Fuzzy sets, uncertainty and information.** Prentice-Hall. Englewood Cliffs, NJ. (1988). Prentice-Hall, Singapore (1992).

[39]. G. Klir y B. Yuan, **Fuzzy Sets and Fuzzy Logic Theory and its Applications**. Prentice Hall. (1995).

[40]. J. Knopfmacher, *On measures of fuzziness*. J. Math. Anal. Appl. 49 (1975), pp. 529-534.

[41]. S. G. Loo, *Measures of fuzziness*. Cybernetica 20 (1977), pp. 201-210.

[42]. J. Marichal, *On Sugeno integral as an aggregation function*, Fuzzy Sets and Systems, 114, (2000), pp. 347-365.

[43]. T. Murofushi y M. Sugeno, *An interpretation of fuzzy measures and the Choquet integral as an integral with respect to a fuzzy measure*. Fuzzy sets and Systems, (1989), pp 201-227.

[44]. T. Murofushi y M. Sugeno, *Fuzzy t-conorm integral with respect to fuzzy measures: generalization of Sugeno integral and Choquet integral*, Fuzzy Sets and Systems 42 (1991), pp. 57-71.

[45]. T. Murofushi y M. Sugeno, *A theory of fuzzy measures: representations, the Choquet integral and null sets*. J. Math. Anal. Appl. 159 (1991), pp. 532-549.

[46]. T. Murofushi, M. Sugeno y M. Machida, *Non-monotonic fuzzy measures and the Choquet integral*. Fuzzy Sets and Systems 64 (1994), pp. 73-86.

[47]. H. T. Nguyen y E. A. Walker. **A first course in Fuzzy Logic.** CRC Press. (1996).

[48]. A. Pradera; E. Trillas y S. Cubillo, *On modus ponens generating functions*. Internat. J. Uncertain. Fuzziness Knowledge Based Systems 8 (2000), 1, pp. 7-19.

[49]. M. L. Puri y D. Ralescu, *A possibility measure is not a fuzzy measure* (short communication). Fuzzy Sets and Systems, (1982), pp. 311-313.

[50]. D. Ralescu y G. Adams, *The fuzzy integral*. J. Math. Anal. Appl. 75 (1980), pp. 562-570.

[51]. T. Riera y E. Trillas, *From measures of fuzziness to Booleanity control*. Fuzzy information and decision processes, 3-16. North-Holland, Amsterdam-New York, (1982).

[52]. D. Schmeidler, *Integral representation without additivity*. Proc. Amer. Math. Soc. 97 (1986), pp. 253-261.

[53]. B. Schweizer y A. Sklar, *Statistical metric spaces*. Pacific J. Math. 10 (1960) pp. 313-334.

[54]. B. Schweizer y A. Sklar, **Probabilistic Metric Spaces.** North-Holland. New York. (1983).

[55]. G. A. Shafer, **A Mathematical Theory of Evidence.** Princeton. (1976).

[56]. M. Sugeno, *Theory of Fuzzy Integrals and its applications*. Ph. D. Dissertation. Tokyo Institute of Technology. 1974.

[57]. M. Sugeno, *Fuzzy measures and fuzzy integrals: a survey*. In: M. M. Gupta, G. N. Saridis and B. R. Gaines, Editors, **Fuzzy Automata and Decision Processes**, North-Holland, Amsterdam (1977), pp. 89-102.

[58]. M. Sugeno, Y. Narukawa y T. Murofushi, *Choquet integral and fuzzy measures on locally compact space*. Fuzzy Sets and Systems 99 2 (1998), pp. 205-211.

[59]. H. Suzuki, *On fuzzy measures defined by fuzzy integral*. J. Math. Anal. Appl. 132 (1988), pp. 87-101.

[60]. H. Suzuki, *Atoms of fuzzy measures and fuzzy integrals*. Fuzzy Sets and Systems 41 (1991), pp. 329-342.

[61]. E. Szmidt y J. Kacprzyk, *Entropy for intuitionistic fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems, 118, (2001), pp. 467-477.

[62]. E. Trillas y C. Alsina, **Introducción a los Espacios Métricos Generalizados.** Fundación Juan March. Serie Universitaria 49. Madrid. (1974).

[63]. E. Trillas y T. Riera, *Entropies in finite fuzzy sets*. Inform. Sci. 15 (1978), 2, pp. 159-168.

[64]. E. Trillas y C. Alsina, *Sur les mesures du degre de flou*. Stochastica 3 (1979), 1, pp. 81-84.

[65]. E. Trillas y C. Sanchis, *On entropies of fuzzy sets deduced from metrics*. Estadistica Española 82-83, (1979), pp. 17-25.

[66]. E. Trillas; C. Alsina y C. Sanchiz, *Sobre Entropías funcionales para difusos finitos*. Actas Sextas Jornadas Luso-Españolas de Matemáticas II. (1981), pp. 677-683.

[67]. E. Trillas y L. Valverde, *On some functionally expressible implications for fuzzy set theory*. Proceedings of the Third International Seminar on Fuzzy Set Theory (1981), pp. 173-190. Johannes Kepler Univ., Linz, (1981).

[68]. E. Trillas y L. Valverde, *An Inquiry into Indistinguishability Operators*. Aspects of Vagueness. Editors H. J. Skala y otros. Reidel Pubs (Dordrech). (1984), pp. 231-256.

[69]. E. Trillas y L. Valverde, *On implication and indistinguishability in the setting of fuzzy logic*. In: J. Kacprzyk y R. R. Yager, Editors, Management Decision Support Systems Using Fuzzy Sets and Possibility Theory, Verlag TUV, Rheinland, (1984).

[70]. E. Trillas y L. Valverde, *On Implication and Indistinguishability in the Setting of Fuzzy Logic*. In: Management Decision Support Systems Using Fuzzy Sets and Possibility Theory. Eds. J. Kacprzyk y otros. Verlag TUV Rheinland. pp. 198-212. (1985).

[71]. E. Trillas y L. Valverde, *On mode and implication in approximate reasoning*. Approximate reasoning in expert systems. Eds. M. M. Gupta y otros. North-Holland. (1985), pp. 157-166.

[72]. E. Trillas, *On functions that cannot be MV-truth values in algebraic structures*. Stochastica 12 (1988), 2/3, pp. 223-227.

[73]. E. Trillas y S. Cubillo, *Condicionales Exactos*. Actas II Conferencia Estylf. (1992), pp. 1-15.

[74]. E. Trillas, *On exact conditionals*. Stochastica 13 (1992), 1, pp. 137-143.

[75]. E. Trillas, *On Exact and Inexact Conditionals.* Prc. IV International Conference On Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems. (1992), pp. 649-655.

[76]. E. Trillas, *On fuzzy conditionals generalising the material conditional.* IPMU'92. Advanced methods in artificial intelligence (1992), pp. 85-100, Lecture Notes in Comput. Sci., 682, Springer, Berlin, (1993).

[77]. E. Trillas y C. Alsina, *Some remarks on approximate entailment.* Internat. J. Approx. Reason. 6 (1992), 4, pp. 525-533.

[78]. E. Trillas; S. Cubillo y A. Rodriguez, *Preórdenes borrosos, indistinguibilidades y estados lógicos borrosos.* Actas III Conferencia Estylf. (1993), pp. 57-65.

[79]. E. Trillas, *On logic and fuzzy logic.* International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems, 1, (1993), 2. pp. 107-137.

[80]. E. Trillas, *Apunte sobre la indistinguibilidad.* Theoria, VIII. (2), 8, (1993), 9, pp. 23-49.

[81]. E. Trillas y C. Alsina, *Logic: going farther from Tarski?* Fuzzy Sets and Systems, 53, (1993), pp. 1-13.

[82]. E. Trillas y S. Cubillo, *On monotonic fuzzy conditionals.* Journal of Applied Non-Classical Logics, 4, (1994), 2, pp. 201-214.

[83]. E. Trillas; S. Cubillo y A. Rodriguez, *Sobre la Identidad de Condicionales Materiales.* Actas IV Conferencia Estylf. (1994), pp. 75-77. *On the identity od fuzzy material conditionals.* Mathware Soft Computing 1, (1994), 3, pp. 309-314.

[84]. E. Trillas; S. Cubillo y J. L. Castro, *Conjunction and disjunction on* ([0,1], l). Fuzzy Sets and Systems 72 (1995), 2, pp. 155-165.

[85]. E. Trillas y S. Cubillo, *Modus ponens on Boolean algebras revisited.* Mathware & Soft Computing, 3, (1996), 1/2, pp. 105-112,.

[86]. E. Trillas; S. Cubillo y C. Del Campo, *A few remarks on some T-conditional functions*. Proc. VI IEEE-International Conference on Fuzzy Systems. Vol. 1. (1997), pp. 153-156.

[87]. E. Trillas y C. Alsina, *A reflection on what is a membership function*. Mathware. Soft Computing 6, (1999), pp. 201-215.

[88]. L. Valverde, *On the structure of t-indistinguishability operators*. Fuzzy Sets and Systems 17 (1985), pp. 313-328.

[89]. L. Valverde y E. Trillas, *On Modus Ponens in Fuzzy Logic*. Proc. XVth IEEE-International Symposium on Multiple-Valued Logic. (1985), pp. 294-301.

[90]. L. Valverde y E. Trillas, *Inference in Fuzzy Logic*. PROC. 2nd. IFSA Congress. (1987), pp. 294-297.

[91]. Z. Wang, *On the null-additivity and the autocontinuity of a fuzzy measure*. Fuzzy Sets and Systems 45 (1992), pp. 223-226.

[92]. Z. Wang y G. Klir, **Fuzzy Measure Theory,** Plenum Press, New York (1992).

[93]. Z. Wang, G.J. Klir y W. Wang, *Fuzzy measures defined by fuzzy integral and their absolute continuity*. J. Math. Anal. Appl. 203 (1996), pp. 150-165.

[94]. S. Weber, *A general concept of fuzzy connectives, negations and implications based on t-norms and t-conorms*. Fuzzy Sets and Systems 11 (1983), pp. 115-134.

[95]. S. Weber, *Descomposable measures and integrals for Archimedean t-conorms*. J. Math. Anal. Appl. 101. (1984), pp 114-138.

[96]. S. Weber, *Conditional measures and their applications to fuzzy sets*. Fuzzy Sets y Systems *42*. (1991), pp. 73-85.

[97]. C. Wu, S. Wang y M. Ma, *Generalized fuzzy integrals: Part I. Fundamental concepts*. Fuzzy Sets and Systems 57 (1993), pp. 219-226.

[98]. C. Wu y M. Ha, *On the regularity of the fuzzy measure on metric fuzzy measure spaces*. Fuzzy Sets and Systems 66 (1994), pp. 373-379.

[99]. L. Xuechang, *Entropy, distance measure and similarity measure of fuzzy sets and their relations*. Fuzzy Sets and Systems 52 (1992), pp. 305-318.

[100]. R. R. Yager, *On the measure of fuzziness and negation, part I: membership in the unit interval*. International Journal of General Systems 5. (1979), pp 221-229.

[101]. R. R Yager, *Measuring tranquillity and anxiety in decision making: An application of fuzzy sets*. International Journal of General Systems 8, (1982), pp. 139-146.

[102]. R. R Yager, *Entropy and specificity in a mathematical theory of evidence*. International Journal of General Systems 9, (1983), pp. 249-260.

[103]. R. R. Yager, *Approximate reasoning as a basis for rule-based expert systems*. IEEE Trans. Systems Man Cybernet. 14 4 (1984), pp. 636-643.

[104]. R. R Yager, *Measures of specificity for possibility distributions*. In Proceedings of the IEEE Workshop on Languages for Automation: Cognitive Aspects in Information Processing, Palma de Mallorca, Spain, (1985), pp. 209-214.

[105]. R. R Yager, *Reasoning with uncertainty for expert systems*. Proceedings of the Ninth International Joint Conference on Artificial intelligence. Los Angeles, (1985), pp. 1295-1297.

[106]. R. R Yager, *Toward a general theory of reasoning with uncertainty part I: nonspecificity and fuzzyness*. International Journal of Intelligent Systems 1, (1986), pp. 45-67.

[107]. R. R Yager, *The entailment principle for Dempstes-Shafer granules*. International Journal of Intelligent Systems 1, (1986), pp. 247-262.

[108]. R. R Yager; S. Ovchinnikov; R. Tong; y H. Nguyen, **Fuzzy sets and applications. Selected papers by L. A. Zadeh**. John Wiley & Sons, New York. (1987).

[109]. R. R. Yager, *On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking*. IEEE Trans. Systems, Man, Cybernet. 18 (1988), pp. 183-190.

[110]. R. R Yager, *Ordinal measures of specificity*. International Journal of General Systems 17, (1990), pp. 57-72.

[111]. R. R Yager, *Measures of specificity of possibility distributions*. Proceedings of the Tenth NAFIPS meeting, U. Of Missouri, Columbia, MO, (1991), pp. 240-241.

[112]. R. R Yager, *Similarity based measures of specificity*. International Journal of General Systems 19, (1991), pp. 91-106.

[113]. R. R Yager, *Default knowledge and measures of specificity*. Information Sciences 61, (1992), pp. 1-44.

[114]. R. R Yager, *On the specificity of a possibility distribution*. Fuzzy Sets and Systems 50, (1992), pp. 279-292.

[115]. R. R., Yager, *Applications and extensions of OWA aggregations*. International Journal of Man-Machine Studies 37, (1992), pp. 103-132.

[116]. R. R. Yager, *On the completion of qualitative possibility measures*. IEEE Trans. on Fuzzy Systems 1 3 (1993), pp. 184-193.

[117]. R. R. Yager y D. Filev, **Essentials of Fuzzy Modelling and Control**. Wiley, New York (1994).

[118]. R. R Yager, *On measures of specificity*, Computational Intelligence: Soft Computing and Fuzzy-Neuro Integration with Applications, edited by Kaynak, O.,

Zadeh L. A., Turksen, B., and Rudas, I. J., Springer-Verlag, Berlin, (1998), pp. 94-113.

[119]. J. Yao y S. Chang, *Fuzzy measure based on decomposition theory*, Fuzzy Sets and Systems, 112, (2000), pp. 187-205.

[120]. L. A. Zadeh, *Fuzzy sets*. Information and Control 8, (1965), pp. 338-353.

[121]. L. A. Zadeh, *Similarity relations and fuzzy orderings*. Information Sciences 3, (1971), pp. 177-200.

[122]. L. A. Zadeh, *Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility*. Fuzzy Sets and Systems 1, (1978), pp. 3-28.

[123]. L. A. Zadeh, *A theory of approximate reasoning*. In: J. E. Hayes, D. Michie y L. I. Kulich, Editors, Machine intelligence, John Wiley & Sons, New York (1979), pp. 149-194.

[124]. L. A. Zadeh, *Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic*. Fuzzy Sets ans Systems 90, (1997), pp. 111-127.

[125]. Qiang Zhang, *Some properties of the variations of non-additive set functions I*, Fuzzy Sets and Systems, 118, (2001), pp. 529-538.

[126]. H. J. Zimmermann, **Fuzzy Set Theory and its Applications.** Kluwer-Nijhoff Publishers, Dordrecht (1985). Kluwer Academic Publishers. (1990). 2nd Revised ed., Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London, (1991). Kluwer, Boston (1996).