Facultad de Informática
Universidad Complutense de Madrid

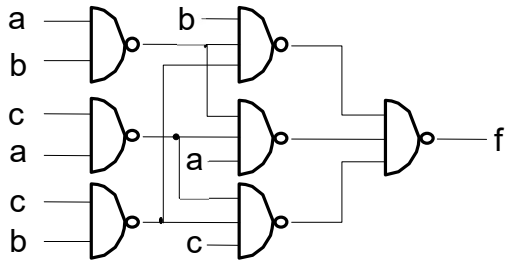
PROBLEMAS DE FUNDAMENTOS DE COMPUTADORES I

TEMA 3

Problemas básicos:

1. Implemente con el menor número de puertas NAND un sistema combinacional que controle el mecanismo de una máquina de cambio de monedas. Poseerá dos entradas, una indicando el tipo de moneda introducida: 0.20€, 0.50€, 1€, 2€ y otra para indicar el tipo de monedas que se desea obtener: 0.05€, 0.10€, 0.20€, 0.50€. A su vez, el sistema tendrá dos salidas, una de error que se activará cuando la operación solicitada no se pueda hacer (p.ej. cambiar una moneda de 0.50€ en monedas de 0.20€), y otra que indicará cuántas monedas debe entregar la máquina a cambio de la moneda introducida. Calcule el coste, el retardo de propagación (máximo) y el retardo contaminación (mínimo) del circuito utilizando los datos de la biblioteca de celdas presentada en teoría.

2. Analice el siguiente circuito y dé una descripción de alto nivel de la función que realiza:

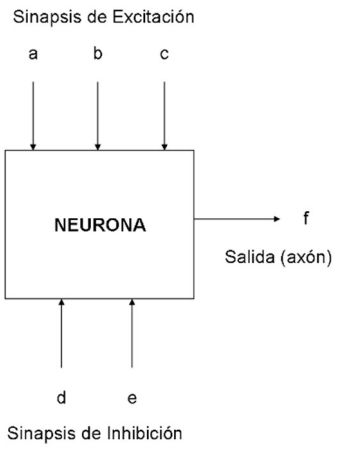


Problemas adicionales:

3. Demuestre que el bloque combinacional cuyo comportamiento viene dado por la siguiente expresión de conmutación es conjunto universal: $P = xy + \overline{x}$.

4. Un sistema combinacional tiene por entrada un número binario de 3 bits representado en complemento a 2, en el rango $-3 \leq x \leq 3$. La salida del sistema es también un número (z) en complemento a 2 de forma que $z(\ x\ ) = -2x$. Determine el número de bits necesario para codificar la salida. Implemente el sistema usando el menor número de puertas NAND de 2 entradas.

5. El sistema nervioso humano, incluyendo el cerebro, está hecho de células especializadas llamadas neuronas. Cada neurona tiene sinapsis (puntos de interconexión, como se muestra en la figura adjunta) de excitación y sinapsis de inhibición. Una neurona produce una salida '1' si el número de sinapsis de excitación con pulsos '1' excede el número de sinapsis de inhibición con pulsos '1' por al menos el valor de umbral de la neurona.



Determine la función booleana $f(a,b,c,d,e)$ de emisión de pulsos a través del canal de salida (axón) en el modelo de la figura, para un valor de umbral 1. Es decir, se produce una salida '1' si el número de sinapsis de excitación a '1',

excede por al menos en uno el número de sinapsis de inhibición a '1'. Minimice $f(a,b,c,d,e)$ y obtenga una implementación usando el menor número de puertas lógicas de no más de 3 entradas. Calcule el coste, el retardo de propagación (máximo) y el retardo contaminación (mínimo) del circuito utilizando los datos de la biblioteca de celdas presentada en teoría.

6. Sea un sistema de seguridad para 2 puertas, tal que para que una de ellas se abra, el usuario debe haber insertado una tarjeta válida que identifique a la puerta y tecleado un cierto código de acceso.

El sistema lee la información generada por un lector de tarjetas y por un lector de teclado. El sistema generará como salida las señales de apertura de cada una de las puertas y de activación de una alarma. Las salidas del lector de tarjetas son: no se ha insertado tarjeta ("00"), tarjeta válida para puerta 1 ("01"), tarjeta válida para la puerta 2 ("10"), tarjeta no válida ("11"). La salida del lector de teclado es el código introducido codificado en binario con 2 bits. Los códigos autorizados para la puerta 1 son "01" y "10" y los códigos autorizados para la puerta 2 son "01" y "11". El código "00" indica que no se ha tecleado nada.

La alarma deberá sonar ('1') si la tarjeta insertada no es válida o si la tarjeta insertada es válida, pero el código tecleado no está autorizado para la correspondiente puerta. Una puerta se abrirá ('1') cuando la tarjeta y el código tecleado asociados a ella sean válidos. En el resto de casos, las puertas permanecerán cerradas y la alarma sin activar.

Implemente el sistema usando el menor número de puertas AND y NAND de no más de 3 entradas. Calcule el coste, el retardo de propagación (máximo) y el retardo contaminación (mínimo) del circuito utilizando los datos de la biblioteca de celdas presentada en teoría.

7. Utilizando el menor número de puertas NAND implemente un sistema combinacional que tiene dos entradas de 2 bits cada una, $X \in \{0,1,2,3\}$ e $Y \in \{1,2\}$, y una salida, Z, que realiza la función: $Z = 2 \times (X + Y - 1) \div Y$. Codifique las entradas y salidas en binario.

8. Se quiere un diseñar un radar. El sistema recibirá como entrada el ángulo que forma el objeto con la horizontal. Los ángulos se miden en sentido antihorario a partir de las 3 horas con una resolución de 30º. Si un objeto se encuentra en la frontera entre dos cuadrantes se considera que pertenece al mayor de los dos.

La salida del radar estará compuesta por 3 bits (A,B,C):

- A se activa cuando el ángulo está en el 1er o en el 3er cuadrante, no se activa en caso contrario.
- B se activa cuando el ángulo está entre 0 y 29º o entre 60º y 119º o entre 210º y 299º, no se activa en caso contrario.
- C se activa cuando sólo se activa una de las salidas anteriores y sólo una.

Se pide:

a) Obtener la tabla de verdad de A, B, C.
b) Sintetizar la expresión de conmutación de cada una de las salidas del sistema requerido, mediante una red NAND de 2 niveles con el menor número de puertas.
c) Calcule el coste, el retardo de propagación (máximo) y el retardo contaminación (mínimo) del circuito utilizando los datos de la biblioteca de celdas presentada en teoría.

9. Utilizando el mínimo número posible de puertas NAND de 2 entradas, implemente las siguientes funciones de conmutación:

- f(a,b,c,d)=Σm(0,1,6,7,9,13)
- g(a,b,c,d)=Σm(0,3,5,6,8,11,13,14)
- h(a,b,c,d)=Σm(4,5,6,7,9,11,12,14)

10. Se desea implementar el mecanismo de control y aviso de una presa. El sistema tiene una entrada, *L*, que indica la cantidad de lluvia que está cayendo (ver tabla) y dos entradas provenientes de sensores: uno ubicado a mitad de la presa, *M*, que devolverá '1' cuando la presa esté al 50% o más y '0' en caso contrario; y otro *R*, que devolverá '1' cuando esté al 90% o más. Se desea implementar un sistema de alarma con una salida *A* codificada (según tabla) que se comporte de la siguiente manera:

- Siempre que el nivel de la presa esté por debajo de la mitad y la lluvia no sea fuerte estaremos en alerta amarilla, y en caso de lluvia fuerte estaremos en alerta naranja.
- Siempre que el nivel este por encima del 50% pero por debajo del 90% esteremos en alerta naranja si y sólo si la lluvia es moderada o fuerte, en cualquier otro caso estaremos en alerta amarilla.
- Siempre que el nivel esté por encima del 90% y haya lluvia estaremos en alerta roja, si no, estaremos en alerta naranja.

Además, el sistema tiene una salida *C* que será igual a '1' cuando las compuertas de la presa estén abiertas, estas compuertas se abrirán siempre que estemos en las condiciones de la entrada que generan alerta roja, se abrirán también siempre que estemos por encima del 50%, con condiciones de alerta naranja y haya lluvia. Además, en caso de que los sensores de nivel de la presa den señales inconsistentes se abrirán las compuertas y se fijará el nivel de alerta a amarillo.

Se pide:

a) Escribir la tabla de verdad que describe el sistema.
b) Implementar la salida *C* utilizando el menor número de puertas lógicas de 2 entradas.
c) Calcule el coste, el retardo de propagación (máximo) y el retardo contaminación (mínimo) del circuito utilizando los datos de la biblioteca de celdas presentada en teoría.

Entrada	L_1L_0
No llueve	00
Débil	01
Moderado	10
Fuerte	11

Salida	A_1A_0
Amarilla	01
Naranja	10
Roja	11

11. En un restaurante de la compañía FAST-FOOD se elaboran distintos platos de comida a partir de los componentes: ensalada de lechuga (*E*), patatas fritas (*F*), pescado (*P*) y carne (*C*). Estos componentes pesan 100, 150, 250 y 200 gramos, respectivamente. Las comidas se transportan por medio de una banda hasta una báscula. Si el peso indicado en la báscula es más de 350 gramos, entonces el cliente deberá pagar 3 euros de suplemento. No es posible que lleguen a la báscula ni platos vacíos, ni platos que sólo contengan ensalada y patatas, ni platos que contengan pescado y carne. Todas las demás combinaciones sí pueden llegar hasta la báscula.

El sistema tiene 2 salidas: Suplemento (*S*), que vale 1 cuando debe pagar suplemento, y Báscula (*B*), que indica el peso del plato medido por la báscula medido en múltiplos de 50 gramos. Por ejemplo, si un plato pesa 300gr la salida Báscula vale 6. Se pide:

a) Obtenga la tabla de verdad de la salida S, que calcula el suplemento y de la salida

B, que indica el peso.

b) Realice el circuito usando el menor número de inversores y puertas NAND.
c) Calcule el coste, el retardo de propagación (máximo) y el retardo contaminación (mínimo) del circuito utilizando los datos de la biblioteca de celdas presentada en teoría.

12. Se desea diseñar un sistema combinacional para controlar el motor de un reproductor de cintas de audio. El circuito dispone de 5 entradas y 3 salidas.

Las señales de entrada son las siguientes:

- *PL*, vale '1' cuando se pulsa el botón de reproducción.
- *RE*, vale '1' cuando se pulsa el botón de rebobinado.
- *FF*, vale '1' cuando se pulsa el botón de avance rápido.
- *ST*, vale '1' cuando se pulsa el botón de parada.
- *M* es una señal que proviene de un sensor especial de música que detecta música en la actual posición de la cinta.

Las salidas son:

- *P*, si vale '1' la cinta avanza
- *R*, si vale '1' se rebobina
- *F*, si vale '1' se avanza rápido.

Sólo puede haber una salida activa y cuando las 3 valen '0', el motor está parado.

Especificaciones de diseño:

- Si se pulsa el botón de reproducción, el reproductor reproduce la cinta.
- Si estando pulsado el botón de reproducción se pulsa el de rebobinado, el reproductor de cintas rebobinará si estamos en medio de una canción. Si no, reproducirá la cinta.
- Si estando pulsado el botón de reproducción se pulsa el de avance rápido, el reproductor de cintas avanzará rápido si estamos en medio de una canción. Si no, reproducirá la cinta.
- Si se presiona el botón de avance rápido o el de rebobinado estando el botón de reproducción sin apretar, el reproductor rebobinara o avanzara rápido.
- El botón de rebobinado y avance rápido nunca estarán pulsados simultáneamente.
- Si se pulsa el botón de parada, se detiene el reproductor de cintas.

Se pide:

a) Obtener una implementación simplificada con puertas NOT, AND, OR de 2 entradas.
b) Ídem con puertas NAND y AND de 2 entradas.
c) Calcule en ambos casos el coste, el retardo de propagación (máximo) y el retardo contaminación (mínimo) del circuito utilizando los datos de la biblioteca de celdas presentada en teoría.

13. Un operador de avionetas para rutas turísticas desea instalar un climatizador inteligente, para lo cual añade a los aeroplanos un sistema de calefacción (*C*) y un sistema de refrigeración (*R*) y los siguientes sensores: un sensor de temperatura (*T*) con la codificación que muestra la tabla, un altímetro que indica si la altura es superior a 350 metros (A = '1') y un interruptor que enciende la calefacción (I = '1'). El operador encarga al fabricante las siguientes especificaciones:

- La calefacción se encenderá automáticamente cuando haya temperaturas inferiores a 15º y el altímetro sea superior a 350 metros.
- La refrigeración se encenderá automáticamente cuando haya temperaturas superiores a 25º si el avión vuela con una altura inferior a 350 metros.

- El interruptor de calefacción deshabilita la refrigeración (en su caso) y enciende la calefacción si la temperatura es inferior a 25º.

Temperatura	Menos de 5º	De 5º a 15º	De 16º a 25º	Más de 25º
T	"00"	"01"	"10"	"11"

a) Halle la tabla de verdad que describe el funcionamiento del circuito.
b) Implemente el sistema utilizando el menor número posible de puertas lógicas.
c) Calcule el coste, el retardo de propagación (máximo) y el retardo contaminación (mínimo) del circuito utilizando los datos de la biblioteca de celdas presentada en teoría.

14. Sea un sistema que controla el riego automático de un parque. El sistema tiene como entradas las señales *E* y *D* que provienen de un reloj-calendario y la señal *L* que viene de un sensor de lluvia, tales que:

	E
verano	1
invierno	0

	D
mañana	0
mediodía	1
tarde	2
noche	3

	L
llueve	1
no llueve	0

El sistema tiene una única salida, *Z*, que vale '1' cuando el riego debe activarse y '0' cuando debe desactivarse. Dicha salida viene determinada de la siguiente manera:

- Si es invierno y mediodía, el riego se activa
- Si es verano, el riego se activa por la mañana, mediodía y noche
- Si llueve, el riego se desactiva

Implemente el sistema utilizando el menor número de puertas lógicas de no más de 3 entradas. Calcule el coste, el retardo de propagación (máximo) y el retardo contaminación (mínimo) del circuito utilizando los datos de la biblioteca de celdas presentada en teoría.

15. Un sistema combinacional que controla una carrera de regatas tiene 4 entradas y 2 salidas. Las entradas indican las características del barco:

- *B* ('1'=extranjero; '0'=nacional)
- *E* ('1'=eslora mayor de 8 metros; '0'=eslora menor o igual a 8 metros)
- *M* ('1'=manga mayor de 5 metros; '0'=manga menor o igual a 5 metros)
- *S* ('1'=equipamiento superior; '0'=equipamiento convencional)

Las dos salidas indican la categoría en la que participa el barco en función de sus características:

- *C* ('1'=clase I; '0'=clase II)
- *I* ('1'=instrucciones de tipo A; '0'=instrucciones de tipo B)

Para organizar a los barcos se usan las siguientes condiciones:

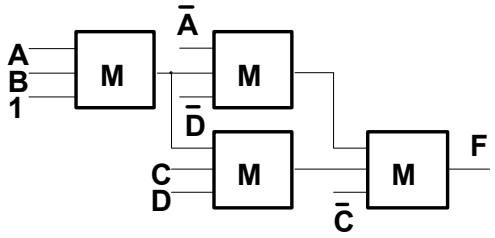
- Los barcos de bandera extranjera y eslora mayor de 8 metros navegan en Clase II junto a los de bandera española. Los demás, en Clase I.
- Para los barcos pertenecientes a Clase II el conjunto de instrucciones depende del tipo de equipamiento: los barcos con equipamiento superior usan el conjunto de instrucciones A, mientras que los de equipamiento convencional usan el conjunto de instrucciones B.

- Todos los barcos de Clase I usan el conjunto de instrucciones B, salvo que tengan una manga mayor de 5 metros o equipamiento superior, en cuyo caso usan el conjunto de instrucciones A.

Se pide:

a) Obtenga una especificación del sistema en forma de tabla de verdad.
b) Obtenga la implementación con puertas de su suma de productos mínima.
c) Calcule el coste, el retardo de propagación (máximo) y el retardo contaminación (mínimo) del circuito utilizando los datos de la biblioteca de celdas presentada en teoría.

16. Obtenga un circuito con el menor número de puertas lógicas equivalente al circuito mostrado en la figura, siendo M un bloque combinacional cuya salida vale 1 cuando en sus entradas hay más unos que ceros (función mayoría).



Problemas de examen:

17. (Febrero 2013) Se desea realizar un circuito combinacional que permita clasificar, según su forma, las piezas que se sitúan en un receptáculo.

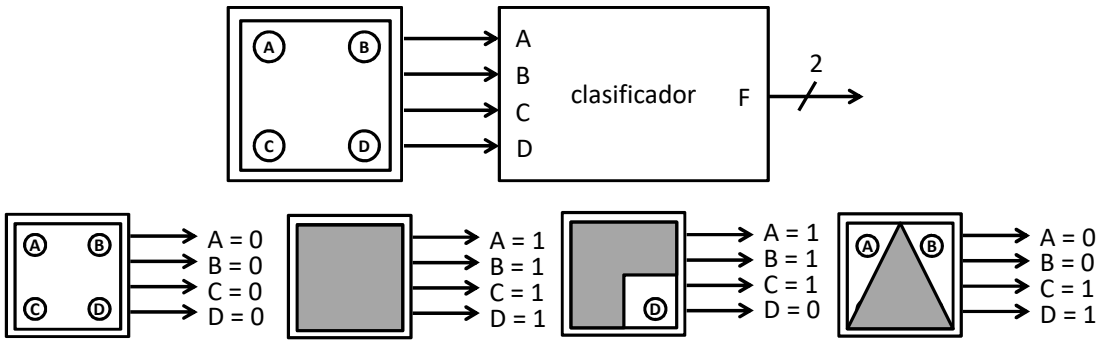
Para ello, las entradas del sistema están conectadas a una matriz de 4 células fotoeléctricas dispuestas como se muestra en la figura.

- Cuando no hay pieza en el receptáculo, todas las células generan valor '0'.
- Cuando la hay, unas células generan valor '0' y otras '1' según la forma de la pieza (véanse algunos ejemplos en la figura).

El sistema generará un vector de 2 bits indicando si la pieza es cuadrada (00), triangular (01), en forma de L (10) o defectuosa (11), es decir, no es una de las anteriores. Considérese que todas las piezas encajan en el receptáculo pero que podrán estar rotadas 90º, 180 ó 270º.

Se pide:

a) Indicar la tabla de verdad del sistema.
b) Diseñarlo utilizando el menor número de puertas NAND e inversores.



18. (Febrero 2014) Se desea implementar un sistema combinacional que regule el tiempo que debe estar en funcionamiento una secadora industrial. La secadora funcionará durante más o menos tiempo de acuerdo con la cantidad de ropa introducida y el nivel de humedad que tenga.

El sistema recibe estos datos codificados en binario por 2 entradas que indican el tramo de volumen: poca ropa (0), cantidad media (1), mucha ropa (2); y el tramo de humedad: baja (0), media (1), alta (2). El tiempo de secado se calcula con la siguiente función:

$$\text{tiempo}(\ \textit{volumen}, \textit{humedad}\ ) = 30' + (\textit{volumen}+\textit{humedad})\times 10'$$

Si, por ejemplo, hay poca ropa y su humedad es alta, el tiempo de secado será:

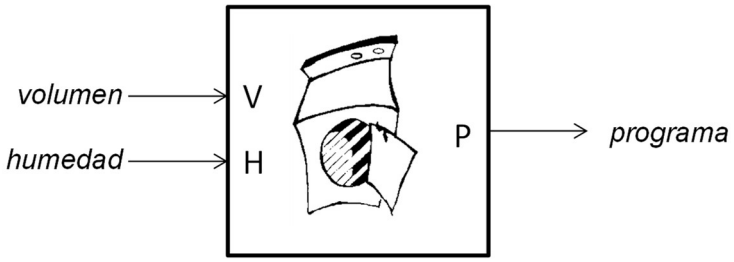
$$\text{tiempo}(\ 0, 2\ ) = 30' + (0+2)\times 10' = 30' + 20' = 50'$$

El sistema, de acuerdo con el tiempo calculado, indicará por una salida el programa de secado codificado en binario que debe realizar la secadora. Si el tiempo es:

- Menor o igual que 30', programa corto (0);
- Mayor de 30' y menor que 60', programa normal (1)
- Mayor o igual a 60', programa largo (2).

Se pide:

a) Indicar la tabla de verdad del sistema.
b) Diseñarlo utilizando el menor número de puertas NAND e inversores.



19. (Junio 2018) Un nudo de tuberías está compuesto por 4 entradas (A, B, C, D) y 4 de salida. Las entradas aportan un caudal de 5, 10, 25 y 30 litros por minuto respectivamente. Cuatro sensores, uno por tubería de entrada, nos indican por qué tubería está circulando el agua (uno lógico significa que circula agua por la correspondiente tubería, cero lógico no circula). Las tuberías de salida (SA, SB, SC y SD) pueden recoger 4, 10, 20 y 40 litros por minuto respectivamente. Cada tubería de salida está regulada por una válvula con dos estados: cerrada (un cero lógico) o abierta (un uno lógico). Teniendo en cuenta que sólo puede circular agua como máximo en dos tuberías de entrada simultáneamente, diseña un sistema combinacional que active las válvulas de las tuberías de salida necesarias para que salga el mismo caudas que entra.

a) Escribe la tabla de verdad de la función combinacional del sistema.
b) Obtén las funciones lógicas simplificadas para las cuatro válvulas.

Soluciones

1. Véanse transparencias.

2. Véanse transparencias.

3. $\bar{x} = p(x, 0), x + y = p(\bar{x}, y)$

4. $z_3 = \sum m(1,2,3) + \sum d(4) = \overline{x_2} x_0 + \overline{x_2} x_1$
$z_2 = \sum m(1,2,4,5) + \sum d(4) = x_1 \overline{x_0} + \overline{x_1} x_0$
$z_1 = \sum m(1,3,5,7) + \sum d(4) = x_0$
$z_0 = \sum d(4) = 0$

$\boldsymbol{n_2} = \overline{(x_2 x_2)},\ \boldsymbol{n_1} = \overline{(x_1 x_1)},\ \boldsymbol{n_0} = \overline{(x_0 x_0)}$
$\boldsymbol{z_3} = \overline{\overline{(n_2 x_0)} \cdot \overline{(n_2 x_1)}},\ \boldsymbol{z_2} = \overline{\overline{(x_1 n_0)} \cdot \overline{(n_1 x_0)}},\ \boldsymbol{z_1} = x_0,\ \boldsymbol{z_0} = 0$

5. $f(a,b,c,d,e) = \sum m(4,8,12,13,14,16,20,21,22,24,25,26,28,29,30,31) =$
$= ac\bar{d} + ac\bar{e} + abc + a\bar{d}\bar{e} + ab\bar{e} + ab\bar{d} + bc\bar{d} + bc\bar{e} + b\bar{d}\bar{e} + c\bar{d}\bar{e}$
---
2 niveles:
$\boldsymbol{d_n} = \bar{d},\ \boldsymbol{e_n} = \bar{e}$
$\boldsymbol{t_1} = acd_n + ace_n + abc,\ \boldsymbol{t_2} = ad_n e_n + abe_n + abd_n$
$\boldsymbol{t_3} = bcd_n + bce_n + bd_n e_n,\ \boldsymbol{t_4} = cd_n e_n$
$\boldsymbol{f} = (t_1 + t_2 + t_3) + t_4$
$t_c = 377$ ps, $t_p = 845$ ps, $coste = 140$ µm^2
Factorizando $(b + c)$:
$\boldsymbol{x} = b + c,\ \boldsymbol{d_n} = \overline{(dd)},\ \boldsymbol{e_n} = \overline{(ee)}$
$\boldsymbol{f} = (a + x)\bar{d}\bar{e} + bc\left(a + \bar{d} + \bar{e}\right) + a(\bar{d}x + \bar{e}x)$
$t_c = 364$ ps, $t_p = 886$ ps, $coste = 92.14$ µm^2

6. $p_1(l_1, l_0, t_1, t_0) = \sum m(5,6) = \overline{l_1} l_0 t_1 \overline{t_0} + \overline{l_1} l_0 \overline{t_1} t_0$
$p_2(l_1, l_0, t_1, t_0) = \sum m(9,11) = l_1 \overline{l_0} t_0$
$a(l_1, l_0, t_1, t_0) = \sum m(4,7,8,10,12,13,14,15) = l_1 \overline{t_0} + l_1 l_0 + l_0 t_1 t_0 + l_0 \overline{t_1} \overline{t_0}$

$\boldsymbol{l_{1n}} = \overline{(l_1 l_1)},\ \boldsymbol{l_{0n}} = \overline{(l_0 l_0)},\ \boldsymbol{t_{1n}} = \overline{(t_1 t_1)},\ \boldsymbol{t_{0n}} = \overline{(t_0 t_0)}$
$\boldsymbol{p_1} = l_{1n} \cdot \overline{\left(\overline{(l_0 t_1 t_{0n})} \cdot \overline{(l_0 t_{1n} t_0)}\right)},\ \boldsymbol{p_2} = l_1 l_{0n} t_0$
$\boldsymbol{a} = \overline{\left(\overline{(l_1 t_{0n})} \cdot \overline{(l_1 l_0)} \cdot \overline{(l_0 t_1 t_0)}\right) \cdot \overline{(l_0 t_{1n} t_{0n})}}$
$t_c = 324$ ps, $t_p = 602$ ps, $coste = 116.11$ µm^2

7. $z_2 = \sum m(9,13,14) + \sum d(0,3,4,7,8,11,12,15) = x_1 x_0 + x_1 y_0$
$z_1 = \sum m(5,6,10) + \sum d(0,3,4,7,8,11,12,15) = \overline{x_1} x_0 + x_1 \overline{x_0} y_1$
$z_0 = \sum m(2,10,13) + \sum d(0,3,4,7,8,11,12,15) = \overline{x_0} y_1 + x_1 x_0 y_0$

$\boldsymbol{n_1} = \overline{(x_1 x_1)},\ \boldsymbol{n_0} = \overline{(x_0 x_0)}$
$\boldsymbol{z_2} = \overline{\overline{(x_1 x_0)} \cdot \overline{(x_1 y_0)}},\ \boldsymbol{z_1} = \overline{\overline{(n_1 x_0)} \cdot \overline{(x_1 n_0 y_1)}}$
$\boldsymbol{z_0} = \overline{\overline{(n_0 y_1)} \cdot \overline{(x_1 x_0 y_0)}}$

8. $A = \sum m(0,1,2,6,7,8) + \sum d(12 \dots 15) = \alpha_2\alpha_1 + \overline{\alpha_3}\alpha_1\overline{\alpha_0} + \overline{\alpha_2}\,\overline{\alpha_1}\,\overline{\alpha_0} + \overline{\alpha_3}\,\overline{\alpha_2}\,\overline{\alpha_1}$
$B = \sum m(0,2,3,7,8,9) + \sum d(12 \dots 15) = \alpha_3\overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_3}\alpha_1\alpha_0 + \overline{\alpha_3}\,\overline{\alpha_2}\,\alpha_1 + \overline{\alpha_2}\,\overline{\alpha_1}\,\overline{\alpha_0}$
$C = \sum m(1,3,6,9) + \sum d(12 \dots 15) = \alpha_2\alpha_1\overline{\alpha_0} + \overline{\alpha_2}\,\overline{\alpha_1}\alpha_0 + \overline{\alpha_3}\,\overline{\alpha_2}\alpha_0$

$\boldsymbol{n_3} = \overline{(\alpha_3\alpha_3)},\ \boldsymbol{n_2} = \overline{(\alpha_2\alpha_2)},\ \boldsymbol{n_1} = \overline{(\alpha_1\alpha_1)},\ \boldsymbol{n_0} = \overline{(\alpha_0\alpha_0)}$
$\boldsymbol{A} = \overline{\overline{(\alpha_2\alpha_1)} \cdot \overline{(n_3\alpha_1 n_0)} \cdot \overline{(n_2 n_1 n_0)} \cdot \overline{(n_3 n_2 n_1)}}$
$\boldsymbol{B} = \overline{\overline{(\alpha_3 n_1)} \cdot \overline{(n_3\alpha_1\alpha_0)} \cdot \overline{(n_3 n_2\alpha_1)} \cdot \overline{(n_2 n_1 n_0)}}$
$\boldsymbol{C} = \overline{\overline{(\alpha_2\alpha_1 n_0)} \cdot \overline{(n_2 n_1\alpha_0)} \cdot \overline{(n_3 n_2\alpha_0)}}$
$t_c = 310$ ps, $t_p = 502$ ps, $coste =$ 178.78 µm^2

9. $f = a\bar{c}d + \bar{a}bc + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$
$g = bc\bar{d} + b\bar{c}d + \bar{b}cd + \bar{b}\bar{c}\bar{d}$
$h = b\bar{d} + \bar{a}b + a\bar{b}d$

$\boldsymbol{n_a} = \overline{(aa)},\ \boldsymbol{n_b} = \overline{(bb)},\ \boldsymbol{n_c} = \overline{(cc)},\ \boldsymbol{n_d} = \overline{(dd)}$
$\boldsymbol{f} = \overline{\overline{(an_c d)} \cdot \overline{(n_a bc)} \cdot \overline{(n_a n_b n_c)}}$
$\boldsymbol{g} = \overline{\overline{(bcn_d)} \cdot \overline{(bn_c d)} \cdot \overline{(n_b cd)} \cdot \overline{(n_b n_c n_d)}}$
$\boldsymbol{h} = \overline{\overline{(bn_d)} \cdot \overline{(n_a b)} \cdot \overline{(an_b d)}}$

10. $a_1(r,m,l_1,l_2) = \sum m(3,6,7,12,13,14,15) = rm + ml_1 + \bar{r}l_1l_0$
$a_0(r,m,l_1,l_2) = \sum m(0,1,2,4,5,8,9,10,11,13,14,15) = rl_1 + \overline{l_1}l_0 + \overline{m}\,\overline{l_0} + \bar{r}\,\overline{l_1}$
$c(r,m,l_1,l_2) = \sum m(3,6,7,8,9,10,11,13,14,15) = r\overline{m} + rl_0 + ml_1 + l_1l_0$

$\boldsymbol{n_1} = \overline{l_1},\ \boldsymbol{n_r} = \bar{r},\ \boldsymbol{n_m} = \overline{m},\ \boldsymbol{t_1} = l_1l_0,\ \boldsymbol{t_2} = ml_1$
$a_1 = rm + t_2 + n_r t_1$
$a_0 = rl_1 + n_1 l_0 + n_m\overline{l_0} + n_r n_1$
$c = rn_m + rl_0 + t_2 + t_1$
$t_c = 364$ ps, $t_p = 544$ ps, $coste =$ 128.99 µm^2

11. $b_3(e,f,p,c) = \sum m(6) + \sum d(0,3,7,11 \dots 15) = fp$
$b_2(e,f,p,c) = \sum m(1,2,5,9,10) + \sum d(0,3,7,11 \dots 15) = c + \bar{f}p$
$b_1(e,f,p,c) = \sum m(4,5,8,9,10) + \sum d(0,3,7,11 \dots 15) = e + fc + \bar{p}\bar{c}$
$b_0(e,f,p,c) = \sum m(2,4,5,10) + \sum d(0,3,7,11 \dots 15) = f\bar{p} + \bar{f}p$
$s(e,f,p,c) = \sum m(6) + \sum d(0,3,7,11 \dots 15) = fp$

$\boldsymbol{n_e} = \bar{e},\ \boldsymbol{n_f} = \bar{f},\ \boldsymbol{n_p} = \bar{p},\ \boldsymbol{n_c} = \bar{c},\ \boldsymbol{t_1} = \overline{(n_f p)}$
$b_3 = \overline{\overline{(fp)}}$
$b_2 = \overline{(n_c t_1)}$
$b_1 = \overline{n_e \cdot \overline{(fc)} \cdot \overline{(n_p n_c)}}$
$b_0 = \overline{\overline{(fn_p)} \cdot t_1}$
$s = b_3$
$t_c = 232$ ps, $t_p = 424$ ps, $coste =$ 82.94 µm^2

12. $p(st,pl,re,ff,m) = \sum m(8,9,10,12) + \sum d(6,7,14,15) = \overline{st} \cdot \left(pl \cdot \overline{m} + pl \cdot \overline{re} \cdot \overline{ff}\right)$
$r(st,pl,re,ff,m) = \sum m(4,5,13) + \sum d(6,7,14,15) = \overline{st} \cdot \left(re \cdot m + \overline{pl} \cdot re\right)$
$f(st,pl,re,ff,m) = \sum m(2,3,11) + \sum d(6,7,14,15) = \overline{st} \cdot \left(\overline{pl} \cdot ff + ff \cdot m\right)$

Puertas NOT, AND, OR de 2 entradas:
$\boldsymbol{n_{st}} = \overline{st},\ \boldsymbol{n_{pl}} = \overline{pl}$
$\boldsymbol{p} = n_{st} \cdot \left(pl \cdot \overline{m} + (pl \cdot \overline{re}) \cdot \overline{ff}\right)$
$\boldsymbol{r} = n_{st} \cdot (re \cdot m + n_{pl} \cdot re)$
$\boldsymbol{f} = n_{st} \cdot (n_{pl} \cdot ff + ff \cdot m)$
$t_c = 280$ ps, $t_p = 811$ ps, $coste = 115.16\ \mu m^2$
Puertas NAND, AND de 2 entradas:
$\boldsymbol{n_{st}} = \overline{(st \cdot st)},\ \boldsymbol{n_{pl}} = \overline{(pl \cdot pl)},\ \boldsymbol{n_m} = \overline{(m \cdot m)},\ \boldsymbol{n_{re}} = \overline{(re \cdot re)},\ \boldsymbol{n_{ff}} = \overline{(ff \cdot ff)}$
$\boldsymbol{p} = n_{st} \cdot \overline{\left(\overline{(pl \cdot n_m)} \cdot \overline{((pl \cdot n_{re}) \cdot n_{ff})}\right)}$
$\boldsymbol{r} = n_{st} \cdot \overline{\overline{(re \cdot m)} \cdot \overline{(n_{pl} \cdot re)}}$
$\boldsymbol{f} = n_{st} \cdot \overline{\overline{(n_{pl} \cdot ff)} \cdot \overline{(ff \cdot m)}}$
$t_c = 312$ ps, $t_p = 756$ ps, $coste = 106.9\ \mu m^2$

13. $c(t_1, t_0, a, i) = \sum m(1,2,3,5,6,7,9,11) = \overline{t_1}a + \overline{t_0}i + \overline{t_1}i$
$r(t_1, t_0, a, i) = \sum m(11,12) = t_1 t_0 \bar{a}$

$\boldsymbol{n_1} = \overline{t_1}$
$\boldsymbol{c} = n_1 a + \overline{t_0} i + n_1 i$
$\boldsymbol{r} = t_1 t_0 \bar{a}$
$t_c = 206$ ps, $t_p = 464$ ps, $coste = 58.97\ \mu m^2$

14. $c(l, e, d_1, d_0) = \sum m(1,4,5,7) = \bar{l}ed_0 + \bar{l}e\overline{d_1} + \bar{l}\,\overline{d_1}d_0$

$\boldsymbol{n_l} = \bar{l},\ \boldsymbol{n_1} = \overline{d_1}$
$\boldsymbol{p} = n_l e d_0 + n_l e n_1 + n_l n_1 d_0$
$t_c = 390$ ps, $t_p = 490$ ps, $coste = 46.99\ \mu m^2$

15. $c(b, e, m, s) = \sum m(8,9,10,11) = b\bar{e}$
$i(b, e, m, s) = \sum m(1,3,5,7,9,10,11,13,15) = s + b\bar{e}m$

$\boldsymbol{c} = b\bar{e}$
$\boldsymbol{p} = s + cm$
$t_c = 180$ ps, $t_p = 631$ ps, $coste = 28.56\ \mu m^2$

16. $f(a, b, c, d) = \sum m(0,4 \ldots 10,12 \ldots 15) = b + a\bar{d} + a\bar{c} + \bar{c}\bar{d}$

17. $z_1(a, b, c, d) = \sum m(0,1,2,4 \ldots 9,11,13,14) = \bar{a}b + \bar{c}d + \bar{a}\bar{d} + \bar{b}\bar{c} + a\bar{b}d + bc\bar{d}$
$z_0(a, b, c, d) = \sum m(0 \ldots 4,6,8,9,10,12) = \bar{c}\bar{d} + \bar{b}\bar{d} + \bar{a}\bar{d} + \bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}$

$\boldsymbol{n_a} = \bar{a},\ \boldsymbol{n_b} = \bar{b},\ \boldsymbol{n_c} = \bar{c},\ \boldsymbol{n_d} = \bar{d},\ t_1 = \overline{(n_a n_d)},\ t_2 = \overline{(n_b n_c)},$
$\boldsymbol{z_1} = \overline{\overline{(n_a b)} \cdot \overline{(n_c d)} \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot \overline{(a n_b d)} \cdot \overline{(bc n_d)}}$
$\boldsymbol{z_0} = \overline{\overline{(n_c n_d)} \cdot \overline{(n_b n_d)} \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot \overline{(n_a n_b)}}$

18. $p_1(v_1, v_0, h_1, h_0) = \sum m(7,13,15) + \sum d(2,6,8 \ldots 11,14) = v_0 h_1 + v_1 h_0$
$p_0(v_1, v_0, h_1, h_0) = \sum m(1,2,4,5,7,12,13,15) + \sum d(2,6,8 \ldots 11,14) = v_0 + h_0$

$\boldsymbol{p_1} = \overline{\overline{(v_0 h_1)} \cdot \overline{(v_1 h_0)}}$

$\boldsymbol{p_0} = \overline{(\overline{v_0}\,\overline{h_0})}$

19. $s_a(a,b,c,d) = \sum m(2,3,6,8,9,12) + \sum d(7,11,13,14,15) = a\bar{c} + \bar{a}c$

$s_b(a,b,c,d) = \sum m(1,3,4,6,9,10,12) + \sum d(7,11,13,14,15) = ac + b\bar{d} + \bar{b}d$

$s_c(a,b,c,d) = \sum m(1,2,6,9,10) + \sum d(7,11,13,14,15) = c\bar{d} + \bar{b}\bar{c}d$

$s_d(a,b,c,d) = \sum m(3,5) + \sum d(7,11,13,14,15) = bd + cd$